§ 3 Relationen

Bei unserem Formalisierungsbeispiel in § 1 kam die Vater-Kind-Beziehung vor, die wir aber dort nicht weiter formalisiert hatten. Auch in der Mathematik sind - wie man von der Schule her weiß - Beziehungen häufig Gegenstand der Untersuchung, wie zum Beispiel die Teilbarkeits-Beziehung. Um nun Eigenschaften solcher Beziehungen formulieren zu können, muß man "Beziehung" - oder wie man dann fachmännisch sagt: "Relation" - schlechthin als mathematischen Begriff etablieren. Diesem Begriff wollen wir uns dadurch nähern, daß wir klären, wie man eine Beziehung am besten beschreibt.

Für eine bestimmte Menge von Personen, z.B. eine Schulklasse, wollen wir die Relation "ist befreundet mit" konkret eruieren. Das erste Problem dabei ist die inhaltliche Definition von "Freundschaft". Hierfür wird man alle möglichen Hilfsmittel wie Psychologie, Philosophie, Poesie usw. heranziehen. Wenn man dann schließlich bei einer zufriedenstellenden Definition angelangt ist, könnte aber immer noch das Problem entstehen, daß nach dieser Definition zwei Mitglieder unserer Personengruppe befreundet sind, die sich selber gar nicht als befreundet empfinden. Also kann man gleich die Beziehung "Freundschaft" durch Befragung ermitteln. Dabei könnte sich jedoch herausstellen, daß beispielsweise Nicole Franziska als Freundin angibt, während Franziska Nicole nicht unter ihren Freundinnen aufführt. Obwohl wir ursprünglich der Meinung waren, daß Freundschaft auf Gegenseitigkeit beruht, also, wie man fachmännisch sagt: eine *symmetrische* Beziehung ist, gehen wir offenbar nur dann völlig korrekt vor, wenn wir die Beziehung so protokollieren, wie es die Befragung ergibt. Wir notieren (x,y) als befreundetes Paar, wenn x sich als mit y befreundet ansieht; ob auch (y,x) ein befreundetes Paar ist, bleibt dabei noch offen.

Um den Begriff "Relation" mathematisch zu etablieren, muß man also zunächst den Begriff "Paar" in die Mathematik einführen. Das tun wir im folgenden Abschnitt 3.1 und kommen dann in Abschnitt 3.4 auf den mathematischen Begriff der Relation zurück.

3.1 Die Paarbildung

Idee. Aus mathematischen Objekten x, y (die nicht unbedingt verschieden sind) ist ein weiteres mathematisches Objekt, das *(geordnete) Paar (x,y)*, in der Weise zusammenzusetzen, daß es auf die Reihenfolge dieser Objekte ankommt. Man nennt x *die erste* und y *die zweite Komponente* des Paares (x,y).

Dies ist keine Definition, sondern nur eine Verdeutlichung, was man sich unter einem Paar vorzustellen hat. Zur Realisierung des Paarbegriffs ist also zum Beispiel die Mengenbildung $\{x,y\}$ unbrauchbar, weil wegen $\{x,y\} = \{y,x\}$ keine Reihenfolge der Komponenten x,y festgelegt ist. Eine brauchbare Realisierung liefert die

Definition (Kuratowski). Sind x und y mathematische Objekte, so bezeichnet man

$$(x,y) := \{\{x\},\{x,y\}\}$$

als *das (geordnete) Paar mit x als erster und y als zweiter Komponente.*

Wie man aus einem Paar die beiden Komponenten mit Hilfe mengentheoretischer Operationen zurückgewinnt, zeigt der leicht zu verifizierende

Satz. *Ist $z=(x,y)$ ein Paar, so gilt:*

$$(i)\ x = \bigcup\bigcap z. \qquad (ii)\ y = \begin{cases} x, & \text{falls } \bigcup z = \bigcap z \\ \bigcup((\bigcup z)\setminus(\bigcap z)), & \text{falls } \bigcup z \neq \bigcap z \end{cases}. \qquad \blacksquare$$

(Hier ist für den Fall, daß x irgendein Objekt bezeichnet, welches keine Menge ist, die Konvention $\bigcup\{x\} := x$ zugrundegelegt.)

Daß jedes Paar seine Komponenten eindeutig festlegt, wird auch durch das folgende Gleichheitskriterium zum Ausdruck gebracht, welches eine unmittelbare Konsequenz des vorhergehenden Satzes ist.

Gleichheitskriterium für Paare. *Für beliebige mathematische Objekte a,b,c,d gilt:*

$$(a,b) = (c,d) \iff a=c \text{ und } b=d. \qquad \blacksquare$$

Folgerung. *Für alle x,y gilt:* $(y,x)=(x,y) \iff x=y.$ $\blacksquare$

<u>*Übung*</u>. Erfüllt die durch $[x,y] := \{x,\{y\}\}$ definierte "Paarbildung" das Gleichheits-Kriterium?

3.2 Das Cartesische Produkt

Definition. Sind L, M Mengen, so nennt man

$$L\times M := \{ (x,y) ;\ x\in L,\ y\in M\} = \{z ;\ \exists x\in L\ \exists y\in M :\ z = (x,y)\}$$

die Produktmenge von L und M. Dabei kann man $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(L\cup M))$ als Rahmenmenge zugrundelegen.

Beweis. Sind $x\in L$ und $y\in M$, so gilt: $\{x\},\{x,y\}\subset L\cup M$, i.e.: $\{x\},\{x,y\}\in\mathfrak{P}(L\cup M)$, und folglich $(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}\subset\mathfrak{P}(L\cup M)$, also: $(x,y)\in\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(L\cup M))$. ∎

Veranschaulichung des Cartesischen Produktes. Sind L, M Intervalle in $\mathbb{R}$, so kann man sich das Cartesische Produkt $L\times M$ als dasjenige Rechteck vorstellen, das aus den Punkten besteht, deren Koordinaten zu L, bzw. M gehören. Es ist durchaus sinnvoll, sich dieser Vorstellung auch in allgemeineren Situationen zu bedienen.

Beispiel. *$\{1,3,6\}\times\{3,5\} = \{(1,3), (1,5), (3,3), (3,5), (6,3), (6,5)\}$.*

3.3 Rechenregeln für das Cartesische Produkt

Als erstes klären wir den Fall, daß eine der beiden Mengen leer ist:

Bemerkung. *Für beliebige Mengen L, M gilt: $L\times M=\emptyset \iff L=\emptyset$ oder $M=\emptyset$.*

Wann bleibt das Cartesische Produkt $L\times M$ gleich, wenn man L und M vertauscht? Die Antwort gibt die

Bemerkung. *Für beliebige nicht-leere Mengen L, M gilt: $L\times M = M\times L \iff L=M$.*

Beweis. "$\Rightarrow$". Es gelte: $L\times M = M\times L$. Zur Herleitung der Mengen-Gleichung $L=M$ zeigen wir die beiden Inklusionen. "$\subset$". Sei $x\in L$. Wegen $M\neq\emptyset$ findet man ein $y\in M$. Dann ist $(x,y)\in L\times M$. Nach Voraussetzung bedeutet dies: $(x,y)\in M\times L$, so daß $x\in M$ ist. "$\supset$" ergibt sich, indem man die Rollen von L und M vertauscht. "$\Leftarrow$" ist trivial. ∎

Wie sich das Cartesische Produkt im Hinblick auf die Booleschen Mengen-Operationen verhält, zeigt der

Satz. *Für beliebige Mengen L, M, N, P gilt:*

(i) $(L \cup M) \times N = (L \times N) \cup (M \times N)$, *und* $N \times (L \cup M) = (N \times L) \cup (N \times M)$.

(ii) $(L \cap M) \times (N \cap P) = (L \times N) \cap (M \times P)$.

(iii) $(L \setminus M) \times N = (L \times N) \setminus (M \times N)$, *und* $N \times (L \setminus M) = (N \times L) \setminus (N \times M)$.

Beweis: *Übungsaufgabe.*

Ebenfalls zur *Einübung* kläre man die folgenden **Fragen:**

1. Gilt die Regel (i) auch für $\cap$ anstelle von $\cup$?
2. Gilt die Regel (ii) auch für $\cup$ (bzw. $\setminus$) anstelle von $\cap$?

3.4 Der Relationsbegriff

Wir können nun die zu Beginn des Paragraphen diskutierte Freundschafts-Beziehung der vorgegebenen Personengruppe mathematisch exakt beschreiben. Nach einer entsprechenden Umfrage haben wir eine Liste von Freundespaaren erhalten. Diese Liste beschreibt - jedenfalls zum Befragungs-Zeitpunkt - die Freundschafts-Beziehungen vollständig. Anstatt nun den Freundschaftsbegriff abstrakt zu definieren, legen wir fest:

> Für je zwei Mitglieder x und y unserer Personengruppe gilt:
> x ist (nach Meinung von x) mit y genau dann befreundet, wenn (x,y) in der hergestellten Liste vorkommt.

Somit ist das inhaltliche Problem der Definition von "ist befreundet mit" durch die Aufzählung der Freundespaare umgangen; wir haben wieder eine *intensionale* (inhaltliche) Beschreibung durch eine *extensionale* (aufzählende) ersetzt.

Eine Beziehung ist also eine Liste von Paaren. Ersetzen wir noch das Wort "Liste" durch den mathematischen Begriff "Menge", so erhalten wir die allgemeine

Definition. Eine *(zweistellige) Relation* ist eine Menge, deren Elemente Paare sind.

Vorteile dieser Definition:

1. Sie ist einfach und problemlos; man muß sich nicht mit inhaltlichen Fragen abplagen. Einer Relation brauchen keine verborgenen Gesetzmäßigkeiten zugrundezuliegen.

2. Relationen sind auf diese Weise mathematische Gegenstände (Mengen) geworden, während sie ursprünglich nur Formulierungsmittel (Bestandteile der Sprache) waren. Somit ist man nun in der Lage, Eigenschaften von Relationen zu studieren.

3. Der Begriff ist sehr allgemein. Alle vorkommenden (nicht zu umfangreichen) Beziehungen fallen darunter. (Was hier mit dem Zusatz "nicht zu umfangreich" gemeint ist, wird unten erläutert.)

Ad 3. Gerade dies wird von vielen zunächst als fragwürdig empfunden. Soll man wirklich jede beliebige Menge von Paaren als eine sinnvolle Relation zulassen? Ist das nicht reichlich willkürlich? An und für sich stellt man sich doch vor, daß sinnvolle Relationen durch irgendwelche zugrundeliegende Gesetzmäßigkeiten entstehen. Dem ist entgegenzuhalten, daß die Antwort auf die Frage, ob eine gegebene Relation (im Sinne der voranstehenden Definition) als sinnvoll anzusehen ist, sich im Laufe der Zeiten durchaus wandeln kann: sie mag ja zunächst ganz sinnlos erscheinen, bis man vielleicht doch eines Tages eine ihr zugrundeliegende Gesetzmäßigkeit entdeckt. Es geht kein Weg daran vorbei: Das einzig Gemeinsame aller möglichen Relationen ist eben nichts anderes als der schlichte Sachverhalt, daß zu je zwei Objekten x und y klar sein muß, ob x und y zueinander in der betreffenden Beziehung stehen oder nicht.

Beschränkungen der Relations-Definition. 1. Nur zweistellige Relationen werden erfaßt.

2. Manche Beziehungen sind zu umfangreich als daß man sie durch eine Menge darstellen könnte. Zum Beispiel die Inklusions-Beziehung für Mengen: Wenn man die Mengen-Paare (A,B), für die A in B enthalten ist, zu einer Menge zusammenfassen würde, so könnte man damit wieder eine Variante des Russel-Paradoxons gewinnen. Also belassen wir solche Beziehungen als Bestandteile der mathematischen Sprache und verwenden für sie bewußt nicht das Wort "Relation".

Bezeichnung. Ist R eine Relation, so schreiben wir anstelle von $(x,y)\in R$ auch xRy und sagen: *x steht in Relation R zu y.* Hierdurch wird der Beziehungscharakter einer Relation deutlicher.

Dieser Schreibweise bedienen wir uns auch bei der Definition einer Relation:

Beispiel. *Für beliebige natürliche Zahlen m, n definieren wir:*

$$m \mid n :\Longleftrightarrow \text{es gibt ein } k \in \mathbb{N} \text{ so, daß } mk = n\,.$$

Dies ist eine suggestive Schreibweise für

$$\mid \;:= \{(m,mk);\; m,k \in \mathbb{N}\}.$$

3.4 Definitions- und Bildbereich einer Relation

Definition. Für jede Relation R sind

$$Def(R) := \{x;\ \text{es gibt ein } y \text{ mit der Eigenschaft: } (x,y) \in R\}$$

und

$$Bild(R) := \{y;\ \text{es gibt ein } x \text{ mit der Eigenschaft: } (x,y) \in R\}$$

wohlbestimmte Mengen. Def(R) nennt man den *Vor-, Definitions-* oder *Argumentbereich von R*, Bild(R) den *Nach-* oder *Bildbereich* ode auch *das Bild von R*. Als Rahmenmenge dient beidesmal die Menge $Feld(R) := \bigcup\bigcup R$.

<u>*Beweis*</u>. Indem man beachtet, daß beim Bilden der großen Vereinigung einer Menge von Mengen jedes Element zu einer Teilmenge wird, schließt man:
Ist $z = (x,y) \in R$, so ist $\{\{x\},\{x,y\}\} = (x,y) \subset \bigcup R$, also $\{x,y\} \in \bigcup R$ und somit $\{x,y\} \subset \bigcup\bigcup R$. Daher gilt: $x,y \in \bigcup\bigcup R$. ∎

Beispiel. *$R := \{(1,2), (2,1), (4,7), (4,8), (9,1)\}$ ist eine Relation, für die gilt:*

$$Def(R) = \{1,2,4,9\}, \quad \text{und} \quad Bild(R) = \{1,2,7,8\}.$$

<u>*Anmerkung*</u>. Nachdem das Gleichheitskriterium bewiesen, das Cartesische Produkt zweier beliebiger Mengen etabliert ist und Definitions- und Bildbereich von Relationen als wohldefinierte Mengen erkannt sind, wird man von der expliziten Gestalt der Paare gemäß der Kuratowski-Definition vermutlich nie wieder Gebrauch machen. Manche leiten daraus ab, daß es sich nicht lohnt, die Kuratowski-Definition zu bemühen. Wir kehren den Spieß um: Die Kuratowski-Definition illustriert sehr deutlich, daß der Sinn von Definitionen (= Begriffsbildungen) in der Mathematik darin besteht, möglichst wenig auf den Wortlaut der Definition zurückgreifen zu müssen, sondern weitgehend mit Sätzen über den definierten Begriff zu arbeiten.

Als <u>*Übungsaufgabe*</u> beweise man den

Satz. *Feld(R) = Def(R) ∪ Bild(R).*

3.6 Bild und Urbild von Mengen unter Relationen.

Schon jetzt führen wir für Relationen Verallgemeinerungen der Begriffe "Bildbereich" und "Definitionsbereich" ein, die hauptsächlich später für Abbildungen wichtig sein werden. Ist R etwa die Vater-Kind-Beziehung, so kann man sich nicht nur für die Menge aller Kinder (= Bild(R)), bzw. die Menge aller Väter (= Def(R)) interessieren, sondern beispielsweise für die Menge aller Kinder, die einen Kieler Vater, bzw. die Menge aller Väter, die ein Kieler Kind haben, i.e.: für das R-Bild (bzw. R-Urbild) der Menge M aller Einwohner Kiels im Sinne der

Definition. Ist R eine Relation und M eine Menge, so wird

$$R(M) := \{y \in \mathrm{Bild}(R);\ \exists x \in M:\ (x,y) \in R\}$$

als *das (volle) Bild von M unter R* oder *R-Bild von M* und

$$R^{-1}(M) = \{x \in \mathrm{Def}(R);\ \exists y \in M:\ (x,y) \in R\}$$

als *das (volle) Urbild von M unter R* oder *R-Urbild von M* bezeichnet.

Für diese Mengenbildungen gelten eine Reihe von Regeln im Hinblick auf die Booleschen Operationen. Wir werden sie speziell für Abbildungen genauer ins Visier nehmen.

3.7 Verankerte Relationen

Definition. Ist R eine Relation und sind L, M Mengen mit der Eigenschaft

$$R \subset L \times M,$$

so sagen wir: *R ist eine Relation zwischen L und M.* Ist L = M, so sagen wir: *R ist eine Relation auf M.*

Der folgende evidente Satz besagt insbesondere, daß jede Relation verankert werden kann:

Satz. *Sei R eine Relation. Dann gilt:*

(i) R ist eine Relation zwischen Def(R) und Bild(R).

(ii) Sind L,M Mengen derart, daß R eine Relation zwischen L und M ist, so gilt:

$$Def(R) \subset L, \text{ und } Bild(R) \subset M. \quad \blacksquare$$

Beispiele. *(i)* $\emptyset$ *(die* leere Relation*).*

(ii) $M \times M$ *(die* All-Relation auf M*).*

(iii) $\mathrm{Id}_M := \{(x,x);\ x \in M\}$ *(die* Gleichheitsrelation *oder* Identität auf M, *auch die* Diagonale von $M \times M$ *genannt).*

3.8 Veranschaulichung von Relationen. 1. durch Pfeildiagramme.

2. durch eine Relationen-Tafel.

3. durch Teilmengen der Zeichenebene (sogenannte *Relationsgraphen*).

1. und 2. illustriere man etwa an der Teilbarkeitsrelation zwischen $L := \{2,3,4\}$ und $M := \{6,7,8,9,10,11,12\}$, 3. anhand von $\{(x^2,x);\ x \in \mathbb{R}\}$.

3.9 Konstruktion neuer Relationen aus vorgegebenen Relationen

3.9.1 Die inverse Relation

In jeder Relation drückt sich eine *Beziehungsrichtung* aus: von der ersten zur zweiten Komponente. Natürlich kann man diese Richtung umkehren. Beispielsweise läßt sich der Größenvergleich "$x \le y$" auch als "$y \ge x$" oder die Beziehung "y ist Elternteil von x" auch als "x ist Kind von y" sehen. Dies führt auf den Begriff der inversen Relation:

Definition. $R^{-1} := \{(y,x);\ (x,y) \in R\}$ nennt man *die zu R inverse Relation.* Hier kann $\mathrm{Bild}(R) \times \mathrm{Def}(R)$ als Rahmenmenge dienen.

Beispiel. $\{(1,2), (1,3), (3,2), (6,6), (7,8)\}^{-1} = \{(2,1), (3,1), (2,3), (6,6), (8,7)\}$.

Satz. *Sei R eine Relation. Dann gilt:*

(i) $(R^{-1})^{-1} = R$.

(ii) $Def(R^{-1}) = Bild(R)$, *und* $Bild(R^{-1}) = Def(R)$.

(iii) Für jede weitere Relation S gilt: $R \subset S \iff R^{-1} \subset S^{-1}$.

<u>Beweis</u>: *Übungsaufgabe.*

3.9.2 Das Relationen-Produkt

Bereits im täglichen Leben kommt es vor, daß man zwei Beziehungen miteinander verknüpft, um eine dritte zu erhalten. Zum Beispiel: " x ist Sohn von y " und "y ist Bruder von z " ergibt "x ist Neffe von z ". Dies wird mathematisch so formalisiert:

Definition. Seien R, S Relationen. Dann ist

$$RS := \{ (x,z)\,;\ \text{es gibt ein } y \text{ so, daß } (x,y) \in R \text{ und } (y,z) \in S \}$$

eine Relation, die das *Relationen-Produkt (oder Verkettung) von R und S genannt wird.* Als Rahmenmenge kann hier Def(R) × Bild(S) dienen. Anstelle von RS kann auch die Schreibeweise

$$S \circ R \quad (\text{lies: } \textit{"S Kringel R"}, \text{ oder } \textit{"S nach R"})$$

verwendet werden. Man spricht dann auch von der *Hintereinanderausführung von R und S.*

Die folgenden Eigenschaften des Relationen-Produktes sind von zentraler Bedeutung.

Satz. *Seien R, S, T Relationen. Dann gilt:*

(i) $(RS)T = R(ST)$. *(ii)* $(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1}$.

<u>Beweis</u>. <u>(i)</u>. "<u>$\subset$</u>". Sei $(w,z) \in (RS)T$. Dann findet man ein y so, daß $(w,y) \in RS$ und $(y,z) \in T$. Weiter findet man ein x so, daß $(w,x) \in R$ und $(x,y) \in S$. Es folgt: $(x,z) \in ST$ und somit $(w,z) \in R(ST)$.

"<u>$\supset$</u>". Sei $(w,z) \in R(ST)$. Dann findet man ein x so, daß $(w,x) \in R$ und $(x,z) \in ST$. Weiter findet man ein y so, daß $(x,y) \in S$ und $(y,z) \in T$. Es folgt: $(w,y) \in RS$, und somit $(w,z) \in (RS)T$.

<u>(ii)</u>. "<u>$\subset$</u>". Sei $(z,x) \in (RS)^{-1}$. Dann ist $(x,z) \in RS$. Also findet man ein y so, daß $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in S$. Es folgt: $(z,y) \in S^{-1}$ und $(y,x) \in R^{-1}$, und somit $(z,x) \in S^{-1}R^{-1}$.

"<u>$\supset$</u>". Sei $(z,x) \in S^{-1}R^{-1}$. Dann findet man y so, daß $(z,y) \in S^{-1}$ und $(y,x) \in R^{-1}$. Es folgt: $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in S$, und somit $(x,z) \in RS$, und folglich $(z,x) \in (RS)^{-1}$. ■

3.9.3 Erzeugung von Relationen mittels Boolescher Operationen

Offenbar gilt der

Satz. *(i) Jede Teilmenge einer Relation ist wieder eine Relation.*

(ii) Der Durchschnitt zweier Relationen ist eine Relation.

(iii) Die Vereinigung zweier Relationen ist eine Relation. ∎

Dabei ist (ii) eine unmittelbare Konsequenz von (i). Beispielsweise gewinnt man die Relation $\leq$ auf $\mathbb{N}$, indem man die Relation $\leq$ auf $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ schneidet.

3.10 Standard-Eigenschaften von Relationen

Definition. Eine Relation R auf einer Menge M heißt

symmetrisch, falls für alle $x,y \in M$ gilt: $xRy \Rightarrow yRx$.

antisymmetrisch, falls für alle $x,y \in M$ gilt: $(xRy$ und $yRx) \Rightarrow x=y$.

transitiv, falls für alle $x,y,z \in M$ gilt: $(xRy$ und $yRz) \Rightarrow xRz$.

reflexiv (auf M), falls für jedes $x\in M$ gilt: xRx.

total oder *konnex (auf M)*, falls für alle $x,y \in M$ gilt: xRy oder yRx.

Achtung. Die ersten drei Eigenschaften sind in Wirklichkeit Eigenschaften der Relation R schlechthin, also von der Verankerung in M unabhängig. Die beiden letzten Eigenschaften hingegen sind eigentlich solche des Paares (R,M) und nicht der Relation R allein.

Mit Hilfe der inversen Relation, der identischen Relation und des Relationen-Produktes kann man die eingeführten Standard-Eigenschaften von Relationen elegant formulieren:

Bemerkung. *Seien R eine Relation und M eine Menge. Dann gilt:*

(i) R ist symmetrisch $\Longleftrightarrow R^{-1}=R$.

(ii) R ist antisymmetrisch $\Longleftrightarrow R\cap R^{-1}\subset Id_{Def(R)}$.

(iii) R ist transitiv $\Longleftrightarrow RR\subset R$.

(iv) R ist reflexiv auf M $\Longleftrightarrow R\supset Id_M$.

(v) R ist total auf M $\Longleftrightarrow R\cup R^{-1}=M\times M$.

Indem man diverse dieser Eigenschaften miteinander kombiniert, erhält man wichtige spezielle Typen von Relationen:

Definition. Sei M eine Menge.

(i) Unter einer *Vergleichsrelation* (oder *Prä-Ordnung*) *auf M* versteht man eine reflexive, transitive Relation auf M.

(ii) Unter einer *Ordnungsrelation auf M* versteht man eine reflexive, antisymmetrische, transitive Relation auf M, also eine antisymmetrische Vergleichsrelation auf M.

(iii) Unter einer *Äquivalenzrelation auf M* versteht man eine reflexive, symmetrische, transitive Relation auf M, also eine symmetrische Vergleichsrelation auf M.

Eine lehrreiche, nicht ganz einfache <u>*Übungsaufgabe*</u> ist der Beweis von

Satz. *Seien R, S Äquivalenzrelationen auf einer Menge M. Dann gilt:*

$$R \cup S = M \times M \Rightarrow (R = M \times M \text{ oder } S = M \times M).$$