§ 2 Mengen

Auf die Frage, worum es in der Mathematik geht, würde man vielleicht spontan antworten: um Zahlen. Aber diese Antwort ist noch zu oberflächlich. Denn die Zahlen haben ihren Ursprung in der Tätigkeit des Zählens, und das Zählen setzt den folgenden entscheidenden Umstand voraus:

> Es muß klar sein, welches die zu zählenden Objekte sind, und die zu zählenden Objekte müssen deutlich voneinander unterscheidbar sein.

Wenn man also mit einem einzigen Satz beschreiben wollte, womit die Mathematik befaßt ist, könnte man sagen, daß sie aus der Vielfalt der uns umgebenden Wirklichkeit einen einzigen Aspekt - und nur diesen - aufgreift und ausarbeitet, nämlich den folgenden:

> Es sind überall einzelne Objekte erkennbar, die man deutlich voneinander unterscheiden und nach Belieben gedanklich zu Ansammlungen zusammenfassen kann.

Dies spiegelt sich im mathematischen Begriff der *Menge* wieder. Er ist der **undefinierte Grundbegriff der Mathematik**, auf dem alles andere aufbaut. Er ist erst im Jahre 1895 naiv von Cantor eingeführt worden. Seither hat sich die Mengenlehre durch verschiedene (auch kritische) Phasen hindurch zu der heutigen *axiomatischen Mengenlehre* entwickelt. Damit ist eine zufriedenstellende Form erreicht, auf der sich die Praxis der Mathematik aufbauen läßt. Allerdings zeichnet sich diese endgültige Form der Mengenlehre durch einen hohen Grad von Formalisierung aus, der für den Normalverbraucher nur schwer zu verdauen ist. Daher werden wir die Mengenlehre in einer naiven Form darstellen, die einerseits für die Zwecke der mathematischen Praxis völlig ausreicht und sich andererseits durch die axiomatische Mengenlehre streng begründen läßt.

2.1 Der naive Mengenbegriff

Die Idee des Mengenbegriffs wird durch die folgende naive "Definition" Cantors aus dem Jahre 1895 deutlich:

Cantors "Definition". Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche Elemente der Menge genannt werden, zu einem Ganzen.

Rede- und Schreibweise für die Elementbeziehung. Ist x ein Objekt aus einer Menge M, so sagt man, *x ist ein Element von M* oder *x ist aus M* oder *x gehört zu M*, und schreibt: $x \in M$. Die Verneinung dieser Aussage wird mit $x \notin M$ notiert.

Eine Menge ist allein dadurch bestimmt, welche Elemente ihr angehören und welche nicht. Diese Feststellung läßt sich folgendermaßen präzisieren:

Gleichheitsprinzip für Mengen. *Seien L, M Mengen. Dann ist L genau dann gleich M, wenn L und M dieselben Elemente enthalten, i.e.: wenn für alle mathematischen Objekte x gilt:* $x \in L \iff x \in M$.

2.2 Beispiele: Zahlbereiche

Bezeichnung. " $:=$ " bedeutet: "ist definiert als".

$\mathbb{N} :=$ Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null.
$\mathbb{N}_0 :=$ Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der 0.
$\mathbb{Z} :=$ Menge der ganzen Zahlen.
$\mathbb{Q} :=$ Menge der rationalen Zahlen.
$\mathbb{R} :=$ Menge der reellen Zahlen.
$\mathbb{C} :=$ Menge der komplexen Zahlen.

Streng genommen müssten diese Mengen alle erst mathematisch konstruiert werden. Dafür würde man zuerst mit gewissen Mengen-Konstruktionen die natürlichen Zahlen definieren und dann, von $\mathbb{N}_0$ ausgehend, durch diverse Erweiterungsschritte nach und nach $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und schließlich $\mathbb{C}$ herstellen. Hiermit ist eine ganze Theorie befaßt, genannt *"Aufbau des Zahlensystems"*. Dies alles führen wir hier nicht durch, bis auf eine Ausnahme: wir werden zeigen, wie man $\mathbb{C}$ aus $\mathbb{R}$ gewinnt.

Für die Einführung in die Mathematik ist der Aufbau des Zahlensystems zweitrangig: Wir können uns ohne weiteres auf den naiven Standpunkt stellen, daß die Zahlen gegeben sind und wir mit ihnen so umgehen dürfen, wie wir es von der Schule her kennen. Jedem Mathematikstudenten sei aber ans Herz gelegt, später im Laufe seines Studiums einmal genauer Kenntnis vom Aufbau des Zahlensystems zu nehmen - anhand eines Lehrbuches oder gegebenenfalls einer Vorlesung.

2.3 Inklusion von Mengen

Definition. L, M seien Mengen.

(i) L heißt *Teilmenge von M* oder *in M enthalten* (symbolisch: $L \subset M$), wenn für alle x gilt: $x \in L \Rightarrow x \in M$. Die Beziehung " $\subset$ " heißt die *Inklusion* oder auch *Teilmengen-Beziehung.*

(ii) L heißt *Obermenge von M* oder man sagt *"L umfaßt M"* (symbolisch: $L \supset M$), wenn $M \subset L$. Die Beziehung " $\supset$ " heißt die *Umfassung* oder auch *Obermengen-Beziehung.*

<u>*Hinweis*</u>. Viele Autoren schreiben " $\subseteq$ " anstelle von " $\subset$ " und bezeichnen mit " $\subset$ " die sogenannte *echte Inklusion*, bei deren Definition zusätzlich auch noch die Ungleichheit der Mengen L, M gefordert wird. Stattdessen bezeichnen wir die echte Inklusion mit " $\subsetneq$ ".

Warnung. Man verwechsele nicht die Beziehungen $x \in M$ und $x \subset M$ miteinander!

Beispiele: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Mit Hilfe der Inklusion kann das Gleichheitsprinzip für Mengen auch so ausgedrückt werden:

Bemerkung. *Für beliebige Mengen L, M gilt:* $L = M \Longleftrightarrow L \subset M$ *und* $L \supset M$.

<u>*Beweis*</u>. <u>"$\Rightarrow$"</u>. Offenbar gilt $L \subset L$ und $L \supset L$. Wenn nun L gleich M ist, darf man L an beliebiger Stelle durch M ersetzen.

<u>"$\Leftarrow$"</u>. Die beiden Inklusionen bedeuten, daß für jedes x gilt:

$$(x \in L \Rightarrow x \in M) \text{ und } (x \in M \Rightarrow x \in L).$$

Dies wiederum ist gleichbedeutend damit, daß gilt: $x \in L \Longleftrightarrow x \in M$. Mit dem Gleichheitsprinzip erhält man folglich: $L = M$. ∎

<u>*Hinweis*</u>. In der mathematischen Praxis ist es eher die Ausnahme, daß man die Gleichheit zweier Mengen L, M direkt mit Hilfe des Gleichheitsprinzips verifiziert. Meist ist es angebracht, die beiden Inklusionen "$L \subset M$" und "$M \subset L$" einzeln nachzuweisen und sich auf diese Weise nach der voranstehenden Bemerkung die ganze

Arbeit in zwei Teilaufgaben aufzuspalten, die oft sehr unterschiedliche Schwierigkeitsgrade aufweisen. Dazu weiter unten ein Beispiel.

Die Inklusions-Beziehung hat die folgenden offensichtlichen Eigenschaften, von denen die zweite bereits in der voranstehenden Bemerkung konstatiert wurde.

Bemerkung. *(i) Für jede Menge L gilt:* $L \subset L$. *(Reflexivität)*

(ii) Für alle Mengen L, M *gilt:* $(L \subset M$ *und* $M \subset L) \Rightarrow L = M$. *(Antisymmetrie)*

(iii) Für alle Mengen L, M, N *gilt:* $(L \subset M$ *und* $M \subset N) \Rightarrow L \subset N$. *(Transitivität)*

Den Terminus "Antisymmetrie" in Aussage (ii) versteht man besser, wenn man die dort vorkommende Implikation durch ihre Kontraposition

$$L \neq M \Rightarrow (L \not\subset M \text{ oder } M \not\subset L)$$

ersetzt, denn in Worten bedeutet sie: Sind L und M verschieden, so können nicht beide Inklusionsbeziehungen $L \subset M$ und $M \subset L$ zugleich bestehen.

2.4 Mengenbildungsregeln

Im Laufe der oben erwähnten Entwicklung von der naiven zur axiomatischen Mengenlehre hat sich gezeigt, daß man - entgegen der intuitiven Vorstellung - gegebene Objekte doch nicht nach Belieben zu Mengen zusammenfassen kann, weil dabei Widersprüche auftreten können. Diese fatale Entdeckung hat die sogenannte *Grundlagenkrise* ausgelöst (siehe dazu weiter unten das *Russel-Paradoxon*), welche aber schließlich bewältigt wurde, und zwar durch die Angabe gewisser Regeln, die sagen, auf welche Weise Mengen gebildet werden dürfen. Das sind die sogenannten *Mengenbildungsregeln* (oder auch *Axiome der Mengenlehre*), die wir im folgenden ausführlich behandeln. Dabei halten wir uns im wesentlichen an die von *Zermelo* und *Fraenkel* stammende Fassung der axiomatischen Mengenlehre.

2.5 Mengenbildung durch Auflistung der Elemente

Regel: Endlich viele konkret gegebene Objekte faßt man zu einer Menge zusammen, indem man sie (genauer ihre Namen) durch Kommata getrennt hinschreibt und mit geschweiften Klammern einschließt: etwa $\{1,2,4\}$.

<u>Anschauliche Vorstellung dazu:</u> Man legt die betreffenden Objekte in einen Behälter; dabei kommt es nicht darauf an, von welcher Art der Behälter ist, in welcher Reihenfolge man die Objekte hineintut oder ob man den Namen eines Objektes mehrfach aufführt:

Beispiel. $\{1,2,4\} = \{1,2,4,2\} = \{2,4,1\}$.

Warnung. Bezeichnen a,b mathematische Objekte, so weiß man a priori nicht, ob die Menge $\{a,b\}$ zwei oder nur ein Element hat, da ja $a=b$ sein könnte.

2.6 Mengenbildung durch Aussonderung (Komprehension)

Regel: Ist $A(x)$ eine Aussageform über einer Menge M, so lassen sich diejenigen Elemente x von M, für welche die Aussage $A(x)$ gilt, zu einer Menge zusammenfassen, die man mit

$$(*) \qquad \{x \in M;\ A(x)\}$$

notiert. Sie ist eine Teilmenge von M. M bezeichnet man hier auch als *Rahmenmenge* und $A(x)$ auch als *definierende Eigenschaft* für die Bildung dieser Teilmenge.

Alternative Bezeichnungen: In $(*)$ ersetzen viele das Semikolon als Trennungszeichen durch einen senkrechten Strich oder durch den Doppelpunkt. Auch ist es verbreitet, die Rahmenmenge erst hinter dem Trennungszeichen einzuführen, also etwa $\{x;\ x \in M \text{ und } A(x)\}$ zu schreiben.

Beispiele. *(i)* $\mathbb{P} := \{n \in \mathbb{N};\ n \text{ ist eine Primzahl}\}$.

(ii) $\{z \in \mathbb{Z};\ 3 \text{ teilt } z\}$.

(iii) $\{n \in \mathbb{N};\ n \text{ teilt } 24\} = \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$.

<u>Abkürzende Schreibweisen.</u> Im Sinne der Schlampregel ist hier in der Praxis eine Fülle von alternativen Schreibweisen in Gebrauch, die meistens sehr suggestiv und knapp sind, aber gelegentlich doch zu Mißverständnissen Anlaß geben, etwa:

- $\{2n;\ n \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N};\ \exists n \in \mathbb{N}: x = 2n\}$ = Menge aller geraden Zahlen
- $\{n^2;\ n \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N};\ \exists n \in \mathbb{N}: x = n^2\}$ = Menge aller Quadratzahlen
- $\{3,4,\dots,12749\} = \{n \in \mathbb{N};\ 3 \le n \le 12749\}$
- $\{\frac{m}{n};\ m,n \in \mathbb{N},\ m \text{ ist ungerade}\}$ (gehört $\frac{2}{6}$ dazu?).

Kommentar. Die voranstehende Mengenbildungsregel drückt ein grundlegendes Prinzip der Mathematik aus, das kurz als *Vergegenständlichung von Eigenschaften* bezeichnet werden könnte: Eine Eigenschaft (repräsentiert durch eine Aussageform) wird in eine Menge verwandelt und damit zu einem mathematischen Objekt, das nun seinerseits Eigenschaften haben kann. Es handelt sich um einen Übergang *vom Intensionalen zum Extensionalen*: Man ersetzt den *Begriffsinhalt* durch den *Begriffsumfang*. Das hat seine Entsprechung in der Alltagserfahrung: Man tut sich mit der Formulierung einer genauen Begriffsdefinition oft schwer, hat aber meist keine Schwierigkeiten zu entscheiden, ob ein konkret gegebenes Objekt unter den Begriff fällt oder nicht.

Mit der nun eingeführten Mengenbildungsregel holen wir das oben angekündigte Beispiel zur Illustration der Bemerkung über das Gleichheitsprinzip nach:

Beispiel. $\{5k+7\ell;\ k,\ell\in\mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$.

Beweis. "$\subset$". Das ist klar, denn $\mathbb{Z}$ ist gegen Multiplikation und Addition abgeschlossen. "$\supset$". Sei $z\in\mathbb{Z}$. Wir setzen $k_0 := 3z$ und $\ell_0 := -2z$. Dann gilt:

$$5k_0 + 7\ell_0 = 15z - 14z = z.$$

Wegen $k_0, \ell_0 \in \mathbb{Z}$ liegt z daher in der Menge $\{5k+7\ell;\ k,\ell\in\mathbb{Z}\}$. ∎

2.7 Die Russel-Menge

Als nächstes behandeln wir ein Beispiel, das zeigt, wie wichtig es ist, bei der Aussonderungsregel mit einer Rahmenmenge zu arbeiten.

Satz. *Sei M eine Menge. Dann ist* $\mathrm{Ru}(M) := \{x\in M;\ x\notin x\}$, *die sogenannte* Russel-Menge von M, *kein Element von M.*

Beweis. Wir setzen $r := \mathrm{Ru}(M)$. Die Annahme "$r\in r$", also "$r\in \mathrm{Ru}(M)$", bedeutet nach Definition von $\mathrm{Ru}(M)$: "$r\notin r$", ist also falsch. Daher gilt: $r\notin r$. Wäre nun auch noch die Beziehung "$r\in M$" gültig, so würde r nach Definition von $\mathrm{Ru}(M)$ zu $\mathrm{Ru}(M)$, also zu r gehören in Widerspruch zur eben hergeleiteten Beziehung "$r\notin r$". ∎

Folgerung. *Es gibt keine Menge, die alle Mengen als Elemente enthält.*

Beweis. Denn nach dem voranstehenden Satz enthält jede Menge mindestens eine andere nicht (nämlich ihre Russel-Menge). ■

Kommentar. Die Folgerung zeigt, daß man eben nicht irgendwelche gegebenen Objekte stets zu einer Menge zusammenfassen kann, z.B. nicht alle Mengen. Der Entdecker dieser Einsicht, *Bertrand Russel*, hat ihr die Form eines Paradoxons gegeben:

> *Bildet man - unvorsichtigerweise - die "Menge" $Ru := \{x;\ x \notin x\}$ (also ohne Rahmenmenge), so kann man (wie im Beweis des obigen Satzes) sowohl die Aussage "$Ru \in Ru$" als auch "$Ru \notin Ru$" herleiten, was natürlich widersprüchlich ist.*

Um dennoch alle Mengen gedanklich zu einem Ganzen zusammenfassen zu können, hat man in die Mengenlehre den Begriff der *Klasse* eingeführt. Dabei handelt es sich um eine Abschwächung des Mengenbegriffs. Durch die Angabe genauer *Klassenbildungsregeln* wird der präzise Umgang mit diesem Begriff gewährleistet. Insbesondere wird gesagt, welche Klassen Mengen sind und welche nicht. Speziell darf man die *Klasse aller Mengen* bilden; sie ist aber, wie oben dargelegt, keine Menge. Diejenige Fassung der Mengenlehre, die auch die Klassen mit einbezieht, geht auf die Mathematiker *von Neumann*, *Bernays* und *Gödel* zurück.

2.8 Die leere Menge

Definition. Eine Menge, die keine Elemente enthält, heiß *leer.*

Satz. *Es gibt genau eine leere Menge.*

Beweis. *Existenz*. Sei M irgendeine Menge. Offenbar enthält dann die Menge

$$\{x \in M;\ x \neq x\}$$

keine Elemente.

Eindeutigkeit. Seien L und M leere Mengen. Dann gilt für jedes x: $x \notin L$ und $x \notin M$, also auch $x \in L \Longleftrightarrow x \in M$. Nach dem Gleichheitsprinzip ist daher $L = M$. ■

Bezeichnung. Die nach dem vorigen Satz eindeutig bestimmte leere Menge wird ab jetzt mit $\emptyset$ bezeichnet.

Anmerkung. Im Beweis des Satzes versteckt ist das Postulat, daß es überhaupt irgendeine Menge gibt. Stattdessen könnte man auch gleich fordern, daß es eine leere Menge gibt. Um die Menge $\mathbb{N}_0$ der natürlichen Zahlen zu konstruieren, benötigt man freilich eine noch stärkere Existenzforderung, nämlich das sogenannte "*Unendlichkeitsaxiom*", welches sehr grob gesprochen besagt, daß es eine "unendliche" Menge gibt.

Satz. *Jede Menge enthält $\emptyset$ als Teilmenge.*

Beweis. Sei M eine Menge. Zu zeigen ist: $\forall x \in \emptyset: x \in M$. Die Verneinung davon lautet: $\exists x \in \emptyset: x \notin M$. Das ist offenbar falsch, da $\emptyset$ keine Elemente enthält. ■

Die Aussage dieses Satzes ist ein Spezialfall der allgemeineren

Bemerkung. *Allaussagen über die leere Menge sind stets wahr.*

Beweis. Sei M irgend eine Menge, und sei A(x) eine Aussageform über M. Die Aussage

$$\forall x \in \emptyset : A(x)$$

ist - wie wir in § 1.e dargelegt haben - gleichbedeutend mit

$$\forall x \in M: x \in \emptyset \Rightarrow A(x).$$

Weil die Voraussetzung der behaupteten Implikation stets falsch ist, ist die Implikation selber stets wahr und somit auch die Allaussage. Die Gültigkeit der Implikation sieht man hier vielleicht auf dem Wege über die Kontraposition "$(\neg A(x)) \Rightarrow x \notin \emptyset$" noch deutlicher ein, da deren Konklusion "$x \notin \emptyset$" natürlich für jedes x gilt. ■

2.9 Die Differenzmenge zweier Mengen

Definition. Sind L, M Mengen, so nennt man $M \setminus L := \{x \in M;\ x \notin L\}$ *die Differenzmenge von M und L* (sprich: "*M ohne L*"). Ist L eine Teilmenge von M, so nennt man $M \setminus L$ auch *das Komplement von L in M*.

Man beachte, daß hier die leere Menge herauskommen kann: $L \setminus L = \emptyset$.

Beispiele. *(i)* $\{1,2,5,7\} \setminus \{2,3,7\} = \{1,5\}$.

(ii) $\mathbb{I} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *ist die Menge aller irrationalen Zahlen.*

2.10 (Kleiner und großer) Durchschnitt

Definition. Sind L und M Mengen, so heißt $L \cap M := \{x;\ x \in L \text{ und } x \in M\}$ *der Durchschnitt von L und M* (hier kann sowohl L als auch M als Rahmenmenge dienen).

Achtung: Auch hier kann die leere Menge herauskommen. Man sagt dann:

Definition. L und M heißen *disjunkt*, wenn $L \cap M$ leer ist.

Auch von mehr als zwei Mengen läßt sich der Durchschnitt bilden:

Definition. Ist $\mathfrak{M}$ eine nicht-leere Menge, deren Elemente alle selber Mengen sind, so bezeichnet man

$$\bigcap \mathfrak{M} := \{x;\ x \in M \text{ für jedes } M \in \mathfrak{M}\}$$

als den *(großen) Durchschnitt über (die Elemente von)* $\mathfrak{M}$. Hier kann jedes Element aus $\mathfrak{M}$ als Rahmenmenge dienen. Anstelle von $\bigcap \mathfrak{M}$ schreibt man auch $\bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M$.

Beispiele. *(i) Für jede Menge L gilt:* $\bigcap\{L\} = L$.

(ii) Für beliebige Mengen L,M gilt: $\bigcap\{L,M\} = L \cap M$.

(iii) $\bigcap\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\} = \emptyset$. ∎

2.11 Mengenbildung durch Vereinigung

In den beiden vorangehenden Nummern handelt es sich um Mengenbildungen mit Rahmenmenge. Bei der Vereinigung hat man jedoch keine Rahmenmenge:

Regel: (i) Sind L und M vorgegebene Mengen, so gibt es genau eine Menge V mit der Eigenschaft:

$$\text{für jedes } x \text{ gilt: } x \in V \iff (x \in L \text{ oder } x \in M).$$

Diese Menge nennt man die *Vereinigung von L und M* und notiert sie mit $L \cup M$.

(ii) Allgemeiner sei $\mathfrak{M}$ eine Menge, die aus lauter Mengen besteht. Dann gibt es genau eine Menge V mit der Eigenschaft:

$$\text{für jedes } x \text{ gilt: } x \in V \iff \exists M \in \mathfrak{M}: x \in M.$$

Diese Menge nennt man die *Vereinigung der* $M \in \mathfrak{M}$ und notiert sie mit $\bigcup \mathfrak{M}$ oder auch $\bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M$.

Beispiele. *(i)* $\bigcup \emptyset = \emptyset$.

(ii) *Für jede Menge L gilt:* $\bigcup\{L\} = L$.

(iii) *Für alle Mengen L,M gilt:* $\bigcup\{L,M\} = L \cup M$.

(iv) $\bigcup\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\} = \{1,2,3\}$. ∎

2.12 Mengen-Algebra

Für die sogenannten Booleschen Verknüpfungen $\cap, \setminus, \cup$ gelten eine Reihe von Rechenregeln, von denen man ständig Gebrauch macht. Die meisten von ihnen sind so einleuchtend, daß man sie bei jeder konkreten Anwendung direkt vor dem geistigen Auge hat. Freilich stößt man dabei gelegentlich auf Schwierigkeiten. Es empfiehlt sich dann, die Situation durch sogenannte Mengen-Diagramme (auch *Venn-Diagramme* genannt) zu veranschaulichen. Dies ersetzt allerdings keine Beweise, die also im Zweifelsfalle streng durchzuführen sind.

Einige ziemlich einsichtige derartige Aussagen findet man in

Satz . *Seien L,M,N Mengen. Dann gilt:*

(i) $L \subset M \iff L \cup M = M \iff L \cap M = L \iff L \setminus M = \emptyset$.

(ii) $L, M \subset N \iff L \cup M \subset N$.

(iii) $L \subset M, N \iff L \subset M \cap N$.

Beweis: Übungsaufgabe!

Zwei etwas weniger evidente derartige Regeln sind

Die de-Morgan-Regeln für Mengen. *Für beliebige Mengen L, M und N gilt:*

(i) $L \setminus (M \cup N) = (L \setminus M) \cap (L \setminus N)$; *(ii)* $L \setminus (M \cap N) = (L \setminus M) \cup (L \setminus N)$.

Beweis. (i). "$\subset$". Sei $x \in L \setminus (M \cup N)$. Dann gilt: $x \in L$ und $x \notin M \cup N$, i.e.: $x \notin M$

und $x \notin N$, und somit $x \in L \setminus M$ und $x \in L \setminus N$. i.e.: $x \in (L \setminus M) \cap (L \setminus N)$.

"$\supset$". Sei $x \in (L \setminus M) \cap (L \setminus N)$. Dann gilt: $x \in L \setminus M$ und $x \in L \setminus N$, und somit $x \in L$, und $x \notin M$ und $x \notin N$, also $x \in L$ und $x \notin M \cup N$, i.e.: $x \in L \setminus (M \cup N)$.

(ii). "$\subset$". Sei $x \in L \setminus (M \cap N)$. Dann ist $x \in L$ und $x \notin M \cap N$, i.e.: $x \notin M$ oder $x \notin N$. Folglich gilt: $x \in L \setminus M$ oder $x \in L \setminus N$, i.e.: x ist aus $(L \setminus M) \cup (L \setminus N)$.

"$\supset$". Sei $x \in (L \setminus M) \cup (L \setminus N)$. Dann gilt: $x \in L \setminus M$ oder $x \in L \setminus N$, also: $x \in L$, und $x \notin M$ oder $x \notin N$. Dies impliziert: $x \in L$ und $x \notin M \cap N$, i.e.: $x \in L \setminus (M \cap N)$. ∎

Entsprechende Regeln gelten für die große Vereinigung und den großen Durchschnitt.

Übung. Man formuliere und beweise diese und weitere Regeln, indem man sich an Mengen-Diagrammen orientiert. Beispielsweise kläre man, ob $(L \setminus M) \setminus N$ und $L \setminus (M \setminus N)$ gleich sind.

2.13 Potenzmengenbildung

Abschließend kommen wir zu eine weiteren Mengenbildung ohne Rahmenmenge.

Regel: Ist M eine Menge, so bilden sämtliche Teilmengen von M wieder eine Menge, die sogenannte *Potenzmenge von M*. Sie wird üblicherweise mit $\mathfrak{P}(M)$ oder *Pot(M)* bezeichnet.

Beispiele. *(i)* $\mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

(ii) $\mathfrak{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$.

(iii) $\mathfrak{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

Übungsaufgabe: Für welche Mengen M gilt: $M = \mathfrak{P}(M)$?

Übungsaufgabe: Seien L, M Mengen. Unter welchen Voraussetzungen gilt:

(i) $\mathfrak{P}(L \cap M) = \mathfrak{P}(L) \cap \mathfrak{P}(M)$;

(ii) $\mathfrak{P}(L \cup M) = \mathfrak{P}(L) \cup \mathfrak{P}(M)$;

(iii) $\mathfrak{P}(L \setminus M) = \mathfrak{P}(L) \setminus \mathfrak{P}(M)$?

Anmerkung. (i) Mit Hilfe der Potenzmengenbildung kann man eine Inklusionsbeziehung in eine Elementbeziehung umschreiben. Denn für beliebige Mengen L, M gilt:

$$L \subset M \Rightarrow L \in \mathfrak{P}(M).$$

(ii) Die umgekehrte Aufgabe läßt sich mit Hilfe der Vereinigungsbildung bewältigen. Denn für jede Menge L und jede Menge $\mathfrak{M}$ von Mengen gilt:

$$L \in \mathfrak{M} \Rightarrow L \subset \bigcup \mathfrak{M}.$$

2.14 Die Vorstellung von den Mengenstufen

Durch die Potenzmengenbildung steigt man gewissermaßen eine Stufe in der Mengenhierarchie höher. Dieser Redeweise liegt die folgende *Vorstellung* zugrunde:

Gilt $a \in M$, so ist M von einer höheren Stufe als a.

Gilt $a \subset M$, so sind a und M von derselben Stufe.

Entsprechend stellt man sich vor: $\{a\}$ ist von höherer Stufe als a.

Derartige Vorstellungen von der Gestuftheit der Mengen unterstützen die Anschauung und strukturieren das riesige "Universum" aller Mengen. Außerdem bieten sie eine gewisse Sicherheit gegen formale Fehler, die sich in komplizierten Situationen leicht einschleichen können. Der fundamentale Unterschied zwischen der Element-Beziehung $\in$ und der Inklusions-Beziehung $\subset$ wird auf diese Weise verankert, und Verwechslungen wird vorgebeugt. Also noch einmal:

"$L \in M$" und "$L \subset M$" sind ganz unterschiedliche Beziehungen.

Um dies zu verdeutlichen, bezeichnet man die Mengen meist mit Großbuchstaben und die Elemente mit kleinen Buchstaben. Weitere Beispiele zur Einübung des "Stufengefühls":

1. Entfernt man aus einer Menge L ein Element a, so erhält man die Menge $L \setminus \{a\}$ (und nicht etwa $L \setminus a$).
2. Fügt man einer Menge L ein Element a hinzu, so erhält man $L \cup \{a\}$ und nicht $L \cup a$.
3. Man bestimme $\{\emptyset, 1\} \cup \{\{\emptyset\}\}$.
4. Man bestimme $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\{1\}))$.

Wie alle anschaulichen Vorstellungen in der Mathematik ist jedoch auch die Vorstellung der Mengenstufen mit Vorsicht zu genießen. Der Versuch, diese Vorstellung begrifflich verankern zu wollen, ist zum Scheitern verurteilt. Zunächst ein sprachliches Gegenargument:

Es gibt keinen eigentlichen Unterschied zwischen Elementen und Mengen; beides sind synonyme Ausdrücke für dasselbe, denn jede Menge kann ja Element sein und umgekehrt. Das Wort "Element" ist nur scheinbar ein selbständiger Begriff; in Wahrheit ist es Bestandteil der Beziehung "ist Element von". Analog verhält es sich mit den Wörtern Tochter und Frau; beides ist dasselbe, da jede Frau eine Tochter und jede Tochter eine Frau ist. Das Wort "Tochter" ist nur Bestandteil der Beziehung "ist Tochter von".

Nun ein sachliches Gegenargument: Es kommen viele Mengen von sogenannter *gemischter* Stufe vor: es ist durchaus nicht selten, daß für zwei Mengen L und M die Beziehungen "$L \in M$" und "$L \subset M$" beide gelten. Zum Beispiel ist $\emptyset \in \{\emptyset\}$ und $\emptyset \subset \{\emptyset\}$. Das ist aber nicht etwa ein Sonderphänomen der leeren Menge:

$$\{1\} \in \{1,\{1\}\} \quad \text{und} \quad \{1\} \subset \{1,\{1\}\}.$$

Schließlich stelle man sich die ***Frage***, ob für jede Menge L die Mengen L und $\{L\}$ verschieden sind. Für $L = \emptyset$ ist das beispielsweise der Fall. Es zeigt sich aber, daß man dies nicht allgemein zeigen kann. Eine Menge L mit der Eigenschaft $L = \{L\}$ gleicht einer Weinflasche, auf deren Etikett die Weinflasche abgebildet ist, auf deren Etikett wiederum die Weinflasche abgebildet ist usw..