NORMALE FAMILIEN

WALTER BERGWEILER

Wir diskutieren einige Anwendungen des folgenden Resultates.

Reskalierungslemma. *Sei* $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ *und sei* $\mathcal{F}$ *eine Familie in* $\mathbb{D}$ *holomorpher Funktionen. Ist* $\mathcal{F}$ *nicht normal, so existieren eine Folge* (z_k) *in* $\mathbb{D}$*, eine Folge* (ρ_k) *positiver reeller Zahlen, eine Folge* (f_k) *in* $\mathcal{F}$ *und eine nichtkonstante meromorphe Funktion* $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$*, so daß* $\rho_k \to 0$ *und* $f_k(z_k + \rho_k z) \to f(z)$ *lokal gleichmäßig in* $\mathbb{C}$.

In dieser Form wurde der Satz erstmals von Zalcman [4] formuliert. Laut Zalcman geht dieses Ergebnis jedoch im wesentlichen auf Pommerenke zurück. So schreibt Zalcman in der Arbeit [4], in der das Reskalierungslemma das "main lemma" ist:

"Major credit for the mathematical content of this paper belongs to Christian Pommerenke. He proved a result similar to the main lemma for *normal functions* [3, Theorem 1]. It turns out that the same proof works in the (more general) context of normal families and even simplifies a little. Thus, this paper is perhaps viewed most properly as a public relation effort for Pommerenke's theorem."

Zalcmans Motivation war eine Formalisierung des Blochschen Prinzips. Dieses heuristische Prinzip besagt, daß die Familie aller (in einem festen Gebiet) meromorphen Funktionen, die eine gewisse Eigenschaft haben, normal ist, wenn es keine in $\mathbb{C}$ meromorphe, nicht konstante Funktion gibt, die diese Eigenschaft hat. Ein typisches Beispiel ist die Eigenschaft, drei gegebene Werte auszulassen. Der Satz von Picard sagt, daß es keine nicht konstante, in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion mit dieser Eigenschaft gibt. Das entsprechende Normalitätskriterium ist der Satz von Montel. Mit Hilfe des Reskalierungslemmas konnte Zalcman dann in vielen Fällen (d. h., für viele "Eigenschaften") aus dem heuristischen Prinzip einen präzisen Satz machen.

In neuerer Zeit hat das Reskalierungslemma aber auch eine Reihe weiterer interessanter Anwendungen gefunden. So hat Eremenko [2] damit einen sehr kurzen Beweis des folgenden, klassischen Satzes von Bloch gegeben. Hier und im folgenden sagen wir, daß ein Gebiet V schlichtes Bild unter einer meromorphen Funktion f ist, falls es ein Teilgebiet U des Definitionsbereiches von f gibt, das von f bijektiv auf V abgebildet wird.

Blochscher Überdeckungssatz. *Sei* $r > 0$*. Dann ist die Familie aller meromorphen Funktionen* $f : \mathbb{D} \to \widehat{\mathbb{C}}$*, für die keine Kreisscheibe vom Radius* r *schlichtes Bild unter* f *ist, normal.*

Zum Beweis nehmen wir an, daß die Behauptung des Satzes für ein $r > 0$, und damit für alle $r > 0$, falsch ist. Wir finden dann eine nicht normale Folge

Kurzfassung eines Vortrages auf dem Tag der Funktionentheorie 1999 in Berlin.

(f_n), so daß keine Kreisscheibe vom Radius $\frac{1}{n}$ schlichtes Bild unter f_n ist. Das Reskalierungslemma liefert Folgen (f_{n_k}), (z_k) und (ρ_k) mit $f_{n_k}(z_k+\rho_k z) \to f(z)$ für eine nicht konstante, meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$. Da aber eine Kreischeibe existiert, die schlichtes Bild unter f ist, erhält man einen Widerspruch. $\square$.

Eremenko hat diese Beweisidee benutzt, um den Blochschen Satz auf quasireguläre Abbildungen im $\mathbb{R}^n$ zu übertragen – auch für diese gilt nämlich das Reskalierungslemma.

Auch der folgende Satz von Nevanlinna kann mit dem Reskalierungslemma bewiesen werden [1, §3]. Dabei heißt $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ ein vollständig verzweigter Wert der meromorphen Funktion f, wenn f keine einfachen a-Stellen hat.

Satz über vollständig verzweigte Werte. *Eine nicht konstante, meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ hat höchstens vier vollständig verzweigte Werte.*

Ein deutliche Verschärfung der Sätze von Bloch und Nevanlinna ist das folgende Resultat.

Ahlforsscher Fünf-Insel-Satz. *Seien $D_1, \dots, D_5 \subset \widehat{\mathbb{C}}$ Jordangebiete mit paarweise disjunktem Abschluß und sei $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine nicht konstante, meromorphe Funktion. Dann ist eines der Gebiete D_j schlichtes Bild unter f.*

Der Beweis [1, §2] besteht aus zwei Teilen. Im ersten Schritt zeigt man, daß zu gegebenen $a_1, \dots, a_5 \in \mathbb{C}$ ein $\varepsilon = \varepsilon(a_1, \dots, a_5)$ existiert, so daß die Behauptung für $D_j = D(a_j, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_j| < \varepsilon\}$ gilt. Dies sieht man wie in Eremenkos Beweis des Blochschen Satzes durch Anwendung des Reskalierungslemmas ein.

Im zweiten Schritt wird der allgemeine Fall auf den ersten Schritt zurückgeführt. Dazu kann man $\overline{D_j} \subset \mathbb{C}$ annehmen. Dann existiert eine quasikonforme Abbildung $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\psi(D_j) \subset D(a_j, \varepsilon)$. Die quasireguläre Abbildung $\psi \circ f$ besitzt nun eine Faktorisierung der Form $\psi \circ f = g \circ \phi$, wobei $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ quasikonform und $g : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph ist. Die Behauptung erhält man, wenn man den ersten Schritt auf g anwendet. $\square$

Dem Ahlforsschen Fünf-Insel-Satz und dem Nevanlinnaschen Satz über vollständig verzweigte Werte entsprechen – gemäß dem Blochschen Prinzip – wieder Normalitätskriterien. Diese können mit dem Reskalierungslemma unmittelbar aus den oben angegebenen Sätzen gefolgert werden.

Das Reskalierungslemma – und einige Verallgemeinerungen davon – haben vielfältige weitere Anwendungen gefunden. Wir begnügen uns hier mit einem Verweis auf einen kürzlich erschienenen Übersichtsartikel von Zalcman [5].

References

[1] W. Bergweiler, A new proof of the Ahlfors five islands theorem, *J. Analyse Math.* 76 (1998), 337-347.

[2] A. Eremenko, Bloch radius, normal families and quasiregular mappings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, to appear.

[3] A. J. Lohwater and Ch. Pommerenke, On normal meromorphic functions, *Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A.*, no. 550 (1973).

[4] L. Zalcman, A heuristic principle in complex function theory, *Amer. Math. Monthly* 82 (1975), 813-817.

[5] ———, Normal families: new perspectives, *Bull. Amer. Math. Soc.* 35 (1998), 215-230.

Mathematisches Seminar, Christian–Albrechts–Universität zu Kiel, Ludewig–Meyn–Str. 4, D–24098 Kiel, Germany

E-mail address: bergweiler@math.uni-kiel.de