Periodische Punkte bei der Iteration ganzer Funktionen

Von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen genehmigte Habilitationsschrift zur Erlangung der venia legendi

vorgelegt von

Walter Bergweiler

aus

Stachelau (jetzt Olpe)

Referenten: Prof. Dr. K. Habetha (RWTH Aachen)
Prof. Dr. H. Th. Jongen (RWTH Aachen)
Weiterer Gutachter: Prof. Dr. I. N. Baker (Imperial College, London)

Tag der Habilitation: 8. Mai 1991

Vorwort

Die vorliegende Arbeit enstand am Lehrstuhl II für Mathematik der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen. Die hier verwandten Methoden und Ideen wurden teilweise bereits vorher während eines zweijährigen Aufenthaltes an der Cornell Universität in Ithaca, New York, entwickelt. Dort war es auch, wo Herr Professor J. H. Hubbard durch eine Reihe von Vorträgen mein Interesse an der Iterationstheorie weckte und mich in dieses Gebiet einführte. Viele wertvolle Diskussionen und Gespräche habe ich während dieser Zeit mit Herrn Professor W. H. J. Fuchs geführt. Seinem Engagement und seiner Unterstützung habe ich meinen Aufenthalt dort zu verdanken. Der Alexander-von-Humboldt Stiftung möchte ich für die Förderung durch ein Feodor-Lynen-Forschungstipendium danken.

Hier in Aachen waren es vor allem die Herren Professoren G. Freiling, K. Habetha, G. Jank, H. Th. Jongen und L. Volkmann, die meiner Arbeit großes Interesse entgegenbrachten und mich in vielfältiger Weise unterstützten, wofür ich Ihnen sehr dankbar bin. Für verschiedene fachliche Diskussionen bin ich den Herren Dr. F. Brüggemann und Dr. H.-G. Meier zu Dank verpflichtet. Weiter möchte ich Herrn Professor I. N. Baker und Dr. F. Brüggemann dafür danken, daß sie ein engliches Manuskript mit den Hauptergebnissen dieser Arbeit sorgfältig lasen und wertvolle Verbesserungsvorschläge machten. Herr Dr. Jerzy Topp hat mir durch die Übersetzung verschiedener russischer Arbeiten einen großen Dienst erwiesen. Auch bei den noch nicht genannten Mitarbeitern des Lehrstuhls II für Mathematik, Herrn Priv.-Doz. Dr. V. Dietrich, Herrn Dipl.-Math. P. Flach, Herrn Dipl.-Math. Th. Niessen, Herrn Dipl.-Math. N. Terglane und Frau H. Volkmann, möchte ich mich für vielfältige Unterstützung während der Erstellung dieser Arbeit bedanken.

Mein besonderer Dank gebührt den Gutachtern und Referenten dieser Arbeit, den Herren Professoren I. N. Baker, K. Habetha und H. Th. Jongen, für ihre Bereitschaft, dieses Habilitationsverfahren zu fördern und die damit

verbundenen Mühen zu übernehmen.

Nicht zuletzt bedanke ich mich bei meiner Frau, Dr. Barbara Nixdorf-Bergweiler, für Ihre große Unterstützung sowie bei meinen Eltern, die mir das Studium der Mathematik ermöglicht haben.

Aachen, im Mai 1991 Walter Bergweiler

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden Fixpunkte ganzer Funktionen untersucht. Im ersten Kapitel betrachten wir speziell Fixpunkte iterierter ganzer Funktionen (die wir auch periodische Punkte nennen). Das in §1.6 formulierte Hauptergebnis (Satz 2) besagt, daß die n-te Iterierte ($n > 1$) einer ganzen transzendenten Funktion unendlich viele Fixpunkte besitzt, die nicht Fixpunkte einer k-ten Iterierten mit $k < n$ sind. Dies bestätigt eine Vermutung von Baker aus dem Jahre 1967. Wir zeigen, daß sogar unendlich viele abstoßende Fixpunkte mit dieser Eigenschaft existieren. Die wichtigsten Hilfsmittel im Beweis sind die Wiman-Valironsche Theorie des Zentralindexes, die Fatou-Juliasche Iterationstheorie sowie ein Resultat von Ahlfors, Dufresnoy und Hayman aus der Theorie der Überlagerungsflächen. Desweiteren zeigen wir (Satz 1), daß bis auf insgesamt fünf Ausnahmefälle auch die n-te Iterierte eines Polynoms abstoßende Fixpunkte hat, die nicht Fixpunkte einer k-ten Iterierten mit $k < n$ sind.

Im zweiten Kapitel zeigen wir, daß einige der Ergebnisse über iterierte ganze Funktionen allgemeiner sogar für zusammengesetzte ganze Funktionen gelten. So geben wir einen neuen Beweis einer Vermutung von Gross aus dem Jahre 1966, welche besagt, daß die Zusammensetzung zweier ganzer transzendenter Funktionen unendlich viele Fixpunkte hat. Wir zeigen (Satz 5), daß solche Zusammensetzungen sogar unendlich viele abstoßende Fixpunkte haben. Im Beweis werden ähnliche Methoden wie in Kapitel 1 verwendet. Insbesondere werden auch einige Ergebnisse aus der Iterationstheorie benutzt, obwohl Satz 5 zunächst einmal überhaupt nichts mit Iteration zu tun hat. Außerdem zeigen wir noch (Satz 6), daß die Zusammensetzung zweier ganzer Funktionen auch dann unendlich viele abstoßende Fixpunkte hat, wenn nur eine der beiden beteiligten Funktionen transzendent ist und die andere ein Polynom ist, dessen Grad größer als zwei ist.

Summary

In this paper, we consider fixpoints of entire funtions. The first chapter deals in particular with fixpoints of iterated entire functions (which are also called periodic points). The main result stated in §1.6 (Satz 2) says that the n-th iterate ($n > 1$) of an entire transcendental function has infinitely many fixpoints which are not fixpoints of a k-th iterate for any k less than n. This confirms a conjecture of Baker from 1967. Actually, we prove that there are even infinitely many repelling fixpoints with this property. The main tools used in the proof are the Wiman-Valiron theory of the central index, the iteration theory of Fatou and Julia, and a result of Ahlfors, Dufresnoy, and Hayman from the theory of covering surfaces. Moreover, we show (Satz 1) that, with the exception of five cases, the n-th iterate of a polynomial has repelling fixpoints which are not fixpoints of a k-th iterate for any k less than n.

In the second chapter, we show that some of the results about iterated entire functions hold more generally for composite entire functions. We give a new proof of a conjecture of Gross from 1966 which says that the composition of two entire transcendental functions has infinitely many fixpoints. We show (Satz 5) that such compositions have in fact infinitely many repelling fixpoints. The proof uses methods similar to those used in Chapter 1. In particular, we use some results from iteration theory, although Satz 5 itself has nothing to do with iteration. Moreover, we show (Satz 6) that the composition of two entire functions has infinitely many repelling fixpoints, if only one of the two functions is transcendental and if the other one is a polynomial whose degree is greater than two.

Kapitel 1

Iteration ganzer Funktionen

1.1 Einführung in die Iterationstheorie

Es sei S eine Menge und $f : S \to S$ eine Funktion. Für nichtnegatives, ganzes n ist die n-te Iterierte f_n durch $f_0(s) = s$ und $f_n(s) = f(f_{n-1}(s))$ für $n \geq 1$ und $s \in S$ definiert. Wir werden uns in diesem Kapitel vor allem mit der Iteration ganzer Funktionen beschäftigen, das heißt, wir betrachten den Fall, daß S die Menge der komplexen Zahlen ist (die wir mit $\mathbb{C}$ bezeichnen) und daß f dort analytisch ist. Im folgenden werden zunächst einige Ergebnisse aus der Iterationstheorie zusammengestellt. Diese dienen hauptsächlich zur Motivation des in §1.6 formulierten Hauptergebnisses (Satz 2), zu dessen Verständnis sie jedoch nicht erforderlich sind. Hierfür reichen die zu Beginn von §1.3 gegebenen Definitionen aus.

Zunächst wollen wir jedoch einige allgemeinere Bemerkungen über die Iteration analytischer Funktionen machen. In diesem Fall hat man als Menge S, die in sich abgebildet wird, natürlich eine Riemannsche Fläche zu wählen. Setzt man S als einfach zusammenhängend voraus, so kann man sich aufgrund des Uniformisierungssatzes auf die drei Fälle $S = \mathbb{C}$, $S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ beschränken.

Der Fall $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ wird in den Arbeiten von Denjoy [26] und Wolff [71, 72, 73] aus dem Jahre 1926 behandelt. Sie zeigen, daß wenn f kein Automorphismus von S ist, dann konvergieren die Iterierten von f gegen ein z_0 aus dem Abschluß von S, gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von S. Eine zusammenfassende Darstellung dieser Ergebnisse (unter Berücksichtigung neuerer Resultate und mit weiteren Literaturhinweisen) findet man etwa bei Burckel [23]. Im folgenden wird dieser Fall nicht mehr betrachtet.

Wir bemerken jedoch noch, daß Heins [49, 50] gezeigt hat, daß ähnliche Resultate auch für viele mehrfach zusammenhängende Riemannsche Flächen gelten.

Im Fall $S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist f notwendigerweise rational. Als "Geburtsstunde" der Iterationstheorie rationaler Funktionen kann man die ausführlichen Arbeiten von Fatou [34] und Julia [53] aus den Jahren 1918-20 ansehen.

Im Fall $S = \mathbb{C}$ schließlich ist f eine ganze Funktion, die transzendent oder auch ein Polynom sein kann. Die Iteration ganzer transzendenter Funktionen wurde erstmals von Fatou [35] im Jahre 1926 systematisch untersucht. Es zeigt sich, daß viele Gemeinsamkeiten mit der Iteration rationaler Funktionen bestehen, aber es gibt auch wesentliche Unterschiede.

In diesem Kapitel werden wir, wie bereits bemerkt, vor allem die Iteration ganzer Funktionen untersuchen. Wegen der angesprochenen Analogien werden wir aber zunächst sowohl den Fall, daß f rational ist, als auch den Fall, daß f ganz ist, betrachten. In den folgenden Abschnitten stellen wir einige Resultate aus der Iterationstheorie rationaler und ganzer Funktionen zusammen.

1.2 Die Theorie von Fatou und Julia

Ausgangspunkt ist der von Montel geschaffene Begriff der normalen Familie. Ist G eine offene Teilmenge von $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und $\mathcal{F}$ eine Familie in G meromorpher Funktionen, so heißt $\mathcal{F}$ *normal* in G, falls jede Folge in $\mathcal{F}$ eine Teilfolge besitzt, die in G lokal gleichmäßig bezüglich der chordalen Metrik konvergiert. Dabei ist nicht verlangt, daß die Grenzfunktion in $\mathcal{F}$ ist, und ∞ ist als Grenzfunktion zugelassen. Ist $G \subset \mathbb{C}$ und haben die Elemente von $\mathcal{F}$ keine Pole, so kann man äquivalenterweise auch die Konvergenz bezüglich der üblichen Metrik in $\mathbb{C}$ betrachten, wenn man wieder ∞ als Grenzfunktion zuläßt.

Für eine rationale oder ganze Funktion f betrachte man nun die Teilmenge $F(f)$ von $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bzw. $\mathbb{C}$, in der die Familie $\{f_n : n \geq 1\}$ normal ist. Um gewisse triviale Fälle auszuschließen, nehmen wir hier und im folgenden stets an, daß f keine (gebrochen) lineare Transformation ist. Das Komplement von $F(f)$ (bezüglich $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bzw. $\mathbb{C}$) wird mit $J(f)$ bezeichnet. Zu Ehren von Fatou und Julia werden heute $F(f)$ bzw. $J(f)$ als *Fatoumenge* bzw. *Juliamenge* von f bezeichnet. Die Bezeichnung Juliamenge ist dabei die heute allgemein übliche, während für die Fatoumenge auch die Bezeichnungen "Menge der Normalität" oder "Menge der Stabilität" gebräuchlich sind.

Nach Definition ist $F(f)$ offen und $J(f)$ abgeschlossen. Während $F(f)$ leer sein kann, ist $J(f)$ niemals leer. Wir stellen einige wichtige Eigenschaften von $J(f)$ zusammen:

(i) $J(f)$ ist perfekt.

(ii) $J(f)$ ist vollständig invariant, das heißt, es gilt $z \in J(f)$ genau dann, wenn $f(z) \in J(f)$ gilt.

(iii) $J(f) = J(f_n)$ für alle natürlichen Zahlen n.

(iv) Für alle $z_0 \in J(f)$, bis auf eine mögliche Ausnahme, ist $J(f)$ der Abschluß der Menge $\cup_{n=1}^{\infty} f_{-n}(z_0)$, wobei $f_{-n}(z_0) = \{z : f_n(z) = z_0\}$ ist. Der mögliche Ausnahmewert kann nur bei ganzen (transzendenten) Funktionen, nicht aber bei rationalen Funktionen auftreten.

(v) Ist z_0 ein anziehender Fixpunkt von f, das heißt, gilt $f(z_0) = z_0$ und $|f'(z_0)| < 1$, und definiert man $A(z_0) = \{z : \lim_{n\to\infty} f_n(z) = z_0\}$, so gilt $\partial A(z_0) = J(f)$.

Oft wird man eine Funktion f iterieren, um einen anziehenden Fixpunkt z_0 von f zu finden. In diesem Fall ist der in (v) definierte *Einzugsbereich* $A(z_0)$ von Interesse. Aus (v) folgt nun, daß $A(z_0)$ und damit auch $J(f)$ eine äußerst komplizierte Struktur haben muß, falls f mehr als zwei anziehende Fixpunkte hat. Dies gilt wegen (iii) auch dann, wenn eine Iterierte von f mehr als zwei anziehende Fixpunkte hat. (Bei zwei oder weniger anziehenden Fixpunkten sind auch "einfach" strukturierte Juliamengen wie Kreise oder Geradenstücke möglich.)

Diese bereits Fatou und Julia bekannten komplizierten Strukturen sind auch für den Nichtmathematiker beim Betrachten der Computerbilder etwa in [58] ersichtlich. Überhaupt hat die Möglichkeit, mit Hilfe von Computern Bilder von Juliamengen zu erzeugen, viel zum neuerwachten Interesse an der Iterationstheorie beigetragen, zumal die Bilder neben ihrer mathematischen Bedeutung im allgemeinen auch ihre ästhethischen Reize haben. Eine ebenso wichtige Rolle bei der "Renaissance" der Iterationstheorie haben aber auch neue mathematische Methoden und Ergebnisse gespielt. Hier sind beispielsweise die Arbeiten von Sullivan [65, 66, 67] zu nennen, in denen die Theorie der quasikonformen Abbildungen auf die Iterationstheorie angewendet wird. Sullivan zeigt, daß jede Komponente G der Fatoumenge einer rationalen Funktion präperiodisch ist, das heißt, es existieren natürliche Zahlen m und n mit $f_{m+n}(G) = f_m(G)$. Dies führt zu einer Klassifikation der Komponenten der Fatoumenge einer rationalen Funktion und einer Beschreibung des Grenzverhaltens von f_n für $n \to \infty$ in diesen Komponenten.

Bei ganzen transzendenten Funktionen hingegen können auch sogenannte wandernde Gebiete G auftreten, bei denen $f_{m+n}(G) \cap f_m(G) = \emptyset$ für alle natürlichen Zahlen m und n gilt. Dies wurde zuerst von Baker [9] gezeigt. Andere Beispiele mit verschiedenen weiteren Eigenschaften wurden von Baker [10, 11], Eremenko und Lyubich [31], Herman [51, S. 106] und Sullivan [66, S. 414] angegeben. Eine zufriedenstellende Klassifizierung dieser wandernden Gebiete und des darin möglichen Grenzverhaltens von f_n existiert bisher nicht.

Außer in den klassischen Arbeiten von Fatou [34] und Julia [53] findet man eine Darstellung der Iterationstheorie rationaler Funktionen zum Beispiel in den Arbeiten von Blanchard [21], Brolin [22], Lyubich [55] und Milnor [56]. Die bei der Iteration ganzer Funktionen auftretenden Besonderheiten sind außer bei Fatou [35] etwa bei Baker [12] und Eremenko und Lyubich [32] berücksichtigt. Auch in dem Buch von Gross [39, Kapitel 8] wird auf die Iteration ganzer Funktionen eingegangen.

1.3 Periodische Punkte

Eine wichtige Rolle in der Iterationstheorie spielen die Werte z_0, für die die Folge $(f_n(z_0))_{n=0}^{\infty}$ periodisch ist. Wir sagen, daß z_0 ein *periodischer Punkt* der rationalen oder ganzen Funktion f ist, wenn eine natürliche Zahl n mit $f_n(z_0) = z_0$ existiert. In diesem Fall heißt n eine *Periode* von z_0 und das kleinste n mit dieser Eigenschaft heißt die *primitive Periode* von z_0. Die periodischen Punkte der Periode 1 sind die *Fixpunkte* von f. Ist z_0 ein periodischer Punkt der primitiven Periode n, so heißt $f_n'(z_0)$ der *Multiplikator* von z_0. (Dies muß im Falle $z_0 = \infty$, f rational, etwas modifiziert werden. Wir gehen hierauf aber nicht näher ein, da wir uns vorwiegend mit der Iteration ganzer Funktionen beschäftigen werden.) Ein periodischer Punkt heißt *anziehend*, *indifferent* oder *abstoßend*, je nachdem ob der Betrag seines Multiplikators kleiner, gleich oder größer als 1 ist. Der Multiplikator eines indifferenten periodischen Punktes hat die Form $e^{2\pi i\alpha}$ mit $0 \leq \alpha < 1$. Ist α rational, so heißt z_0 *rational indifferent*. Andernfalls heißt z_0 *irrational indifferent*.

Es ist nicht schwer einzusehen, daß anziehende periodische Punkte immer in der Fatoumenge liegen, während abstoßende periodische Punkte immer in der Juliamenge sind. Außerdem ist bekannt, daß rational indifferente periodische Punkte immer in der Juliamenge liegen. Für irrational indifferente periodische Punkte ist die Frage, ob sie in der Fatou- oder Juliamenge liegen, im allgemeinen schwierig zu beantworten. Beide Möglichkeiten kommen vor, wie von Cremer [25], Pfeifer [59] und Siegel [63] gezeigt wurde. Für neuere Ergebnisse zu dieser Problematik verweisen wir auf Yoccoz [79].

Die Bedeutung der periodischen Punkte ersieht man auch aus dem klassischen Resultat (vgl. Fatou, [34, Kapitel 4, S. 45] und [35, S. 354]), daß jeder Punkt der Juliamenge Häufungspunkt periodischer Punkte ist. Außerdem zeigte Fatou [34, Kapitel 4, S. 60], daß eine rationale Funktion nur endlich viele anziehende und indifferente periodische Punkte besitzt. (Die scharfen Abschätzungen für die Anzahl dieser Punkte wurden von Shishikura [64] gegeben.) Es folgt, daß die Juliamenge einer rationalen Funktion der Abschluß der Menge der abstoßenden periodischen Punkte ist (man vgl. auch Julia [53, S. 99 und S. 118]). Wir bemerken an dieser Stelle, daß diese Eigenschaft von Julia als Definition der Menge, die heute seinen Namen trägt, benutzt wurde. Ganze transzendente Funktionen können unendlich viele anziehende und indifferente periodische Punkte besitzen. (Ein Beispiel hierfür ist etwa durch $f(z) = e^z + z + a$ gegeben, falls $|a-1| \leq 1$ und $a \neq 0$ gilt.) Baker [8] zeigte jedoch 1968, daß auch für ganze transzendente Funktionen die Juliamenge der Abschluß der Menge der abstoßenden periodischen Punkte ist. Vorher war noch nicht einmal bekannt gewesen, ob ganze Funktionen überhaupt immer abstoßende periodische Punkte haben.

Aus den obigen Resultaten kann man insbesondere ableiten, daß eine rationale oder ganze Funktion unendlich viele periodische Punkte und sogar unendlich viele abstoßende periodische Punkte hat. Es stellt sich die Frage, was man über die Perioden und primitiven Perioden dieser Punkte sagen kann. Diese Frage soll in den folgenden Abschnitten untersucht werden.

1.4 Periodische Punkte von Polynomen

Es sei p ein Polynom vom Grad $d \geq 2$. Dann ist für $n \geq 1$ die n-te Iterierte p_n ein Polynom vom Grad d^n. Folglich hat p genau d^n periodische Punkte der Periode n, wenn wir die periodischen Punkte gemäß ihrer Vielfachheit (als Nullstellen von $p_n(z) - z$) zählen.

Wir betrachten nun das Beispiel $p(z) = z^2 - z$. Offensichtlich sind 0 und 2 die periodischen Punkte der Periode 1. Weiter ist $p_2(z) - z = z^3(z-2)$ und damit sind 0 und 2 auch die einzigen periodischen Punkte der Periode 2, wobei 0 allerdings die Vielfachheit 3 hat. Es folgt, daß p keine periodischen Punkte der primitiven Periode 2 hat.

Baker [7, Theorem 2] hat gezeigt, daß dieses Beispiel in gewisser Weise eine Ausnahme bildet, indem er den folgenden Satz bewies.

Satz A *Es sei $p(z)$ ein Polynom vom Grad $d \geq 2$ und es sei n eine natürliche Zahl. Man nehme an, daß $p(z)$ keinen periodischen Punkt der primitiven Periode n besitze. Dann gilt $d = n = 2$. Darüberhinaus ist $p(z)$ konjugiert zu $z^2 - z$, das heißt, es gibt eine lineare Funktion $l(z)$, so daß $l(p(l_{-1}(z))) = z^2 - z$ ist, wobei $l_{-1}(z)$ die inverse Funktion von $l(z)$ bezeichnet.*

Wir bemerken noch, daß Baker [7, Theorem 3] auch ein entsprechendes Ergebnis für rationale Funktionen erzielt hat. Hier treten insgesamt vier Ausnahmefälle auf, in denen periodische Punkte einer gewissen primitiven Periode fehlen können.

Ein ähnliches Ergebnis gilt für abstoßende periodische Punkte.

Satz 1 *Es sei $p(z)$ ein Polynom vom Grad $d \geq 2$ und es sei n eine natürliche Zahl. Man nehme an, daß $p(z)$ keinen abstoßenden periodischen Punkt der primitiven Periode n besitze. Dann liegt einer der folgenden fünf Fälle vor:*

(i) $n = 1$, $d \geq 2$,

(ii) $n = 2$, $d = 2$,

(iii) $n = 2$, $d = 3$,

(iv) $n = 2$, $d = 4$,

(v) $n = 3$, $d = 2$.

Der Beweis von Satz 1 ist ähnlich zum Beweis von Satz A. Er wird in §1.12 gegeben werden, wo auch der Beweis von Satz A kurz skizziert werden wird.

Wir wollen jedoch bereits hier Beispiele angeben, die zeigen, daß in den in Satz 1 angegebenen Fällen abstoßende periodische Punkte der entsprechenden primitiven Periode tatsächlich fehlen können.

(i) Es sei $p(z) = z^d + z$. Dann ist 0 der einzige Fixpunkt von p, das heißt, 0 ist der einzige periodische Punkt der Periode 1. Offensichtlich hat 0 den Multikplikator 1.

(ii) Hier können wir wieder $p(z) = z^2 - z$ wählen.

(iii) Es sei $p(z) = z^3 - 2z$. Dann gilt

$$p_2(z) - z = (p(z) - z)(z^2 - 1)^3.$$

Damit sind 1 und -1 die periodischen Punkte der primitiven Periode 2, und diese haben beide den Multiplikator 1.

(iv) Es sei $p(z) = z^4 - (1 + 2i)z$. Dann gilt

$$p_2(z) - z = (p(z) - z)(z^6 - (1 + 3i)z^3 - 1 + i)^2.$$

Dies zeigt, daß alle periodischen Punkte der primitiven Periode 2 den Multiplikator 1 haben.

(v) Es sei $p(z) = z^2 - \frac{7}{4}$. Dann gilt

$$p_3(z) - z = (p(z) - z)(z^3 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{9}{4}z - \frac{1}{8})^2.$$

Dies zeigt, daß alle periodischen Punkte der primitiven Periode 3 den Multiplikator 1 haben.

Wir bemerken noch, daß Polynome (und allgemeiner auch rationale Funktionen) immer einen Fixpunkt haben, der abstoßend ist oder Multiplikator 1 hat. Dies wurde bereits von Fatou [34, S. 168] und Julia [53, S. 85 und S. 243] gezeigt. Die Beispiele zu (iii), (iv) und (v) haben ebenfalls periodische Punkte der entsprechenden primitiven Periode mit Multiplikator 1. Das ist kein Zufall, denn man kann zeigen, daß außer möglicherweise im Fall (ii), das heißt, im Fall $d = n = 2$, ein Polynom vom Grad d immer einen periodischen Punkt der primitiven Periode n besitzt, der abstoßend ist oder Multiplikator 1 hat. Auf den Beweis dieser Tatsache wollen wir hier jedoch nicht näher eingehen.

1.5 Periodische Punkte ganzer transzendenter Funktionen

Es sei f eine ganze transzendente Funktion. Das Beispiel $f(z) = e^z + z$ zeigt, daß f keine periodischen Punkte der Periode 1 haben muß. Bereits Fatou [35, S. 345] zeigte jedoch, daß f immer mindestens einen periodischen Punkt der Periode 2 hat. Der Beweis ist kurz und elegant und soll daher hier noch einmal skizziert werden. Wir nehmen an, daß f keinen periodischen Punkt der Periode 2 hat. Dann gilt $f(f(z)) \neq z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Es folgt, daß $f(z) \neq z$ und $f(f(z)) \neq f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Damit ist die durch

$$h(z) = \frac{f(f(z)) - z}{f(z) - z}$$

gegebene Funktion h eine ganze Funktion, die die Werte 0 und 1 nicht annimmt. Nach dem Satz von Picard ist h dann konstant. Steht das einmal fest, so ist leicht ein Widerspruch zu erzielen.

Fatou wies darauf hin, daß man mit Hilfe einer auf Borel zurückgehenden Verallgemeinerung des Picardschen Satzes sogar zeigen kann, daß f unendlich viele periodische Punkte der Periode 2 hat. Dieses Ergebnis wurde im Jahre 1948 durch Rosenbloom [61] verallgemeinert, der zeigte, daß für jedes $n \geq 2$ unendlich viele periodische Punkte der Periode n existieren. Zum Beweis benutzte er die Nevanlinnasche Wertverteilungstheorie, die ja auch eine Verallgemeinerung des Picardschen Satzes darstellt.

Die Resultate von Fatou und Rosenbloom sagen nichts über die primitiven Perioden der periodischen Punkte aus. Ein Ergebnis in dieser Richtung erzielte Baker [6] im Jahre 1960. Mit Hilfe der Nevanlinnaschen Theorie bewies er, daß höchstens eine (von f abhängige) natürliche Zahl n existiert mit der Eigenschaft, daß f nur endlich viele periodische Punkte der primitiven Periode n hat. Wie bereits zu Anfang dieses Abschnitts bemerkt, kann dies für $n = 1$ tatsächlich vorkommen. Baker [6, S. 284] (vgl. auch [46, Anhang, S. 184] und [47, Problem 2.20]) sprach die Vermutung aus, daß $n = 1$ die einzige Zahl ist, für die dies auftritt, das heißt, er vermutete: *Ist $n \geq 2$, so hat f unendlich viele periodische Punkte der primitiven Periode n.* In [4, 5] gab Baker Klassen von ganzen Funktionen an, für die diese Vermutung richtig ist.

Über die Multiplikatoren der periodischen Punkte von f ist recht wenig bekannt. In [16] wurden einige Klassen von Funktionen angegeben, für die unendlich viele abstoßende periodische Punkte der primitiven Periode n für jedes $n \geq 2$ existieren. Whittington [70] untersuchte Funktionen, deren untere Ordnung kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, oder die Ordnung $\frac{1}{2}$ und Minimaltyp haben. Unter Benutzung eines Resultats von Kjellberg [54] über den Minimalbetrag ganzer Funktionen zeigte er, daß für diese Funktionen unendlich viele Fixpunkte existieren, die abstoßend sind oder Multiplikator 1 haben. Dies gilt für Funktionen stärkeren Wachstums im allgemeinen nicht mehr.

1.6 Formulierung des Hauptergebnisses

Das wichtigste Ziel dieses ersten Kapitels ist zu zeigen, daß die im vorigen Abschnitt zitierte Vermutung von Baker richtig ist. Tatsächlich werden wir das folgende, allgemeinere Resultat beweisen.

Satz 2 *Es sei f eine ganze transzendente Funktion und es sei $n \geq 2$. Dann hat f unendlich viele abstoßende periodische Punkte der primitiven Periode n.*

Wir bemerken noch, daß ganze Funktionen keine anziehenden periodischen Punkte zu haben brauchen. Ein Beispiel dafür, welches bereits Fatou [35, S. 370] bekannt war, ist durch $f(z) = e^z$ gegeben. Außerdem gilt natürlich - wie bereits früher angemerkt - die Behauptung des Satzes nicht für $n = 1$, was etwa durch das Beispiel $f(z) = e^z + z + a$ mit $|a - 1| \leq 1$ gezeigt wird.

Wir notieren zwei Folgerungen zu Satz 2.

Folgerung 1 *Wenn alle Fixpunkte einer ganzen transzendenten Funktion F verschiedene Multiplikatoren haben, dann ist F nicht die n-te Iterierte, $n > 1$, einer ganzen Funktion f.*

Folgerung 2 *Wenn eine ganze Funktion F nur endlich viele abstoßende Fixpunkte hat, dann ist F nicht die n-te Iterierte, $n > 1$, einer ganzen Funktion f.*

Diese Resultate wurden von Baker [4, S. 152] und Whittington [70, S. 533] unter zusätzlichen Voraussetzungen über die Ordnung von F oder f bewiesen. Eine wesentliche Verallgemeinerung von Folgerung 2 werden wir im zweiten Kapitel (Satz 5) beweisen.

Der Rest dieses Kapitels ist wie folgt aufgebaut. In §1.7 und §1.8 stellen wir einige bereits bekannte Resultate zusammen, die wir in §1.9 verwenden werden, um ein Ergebnis über abstoßende Fixpunkte zusammengesetzter

Funktionen zu beweisen. Dieses Ergebnis wird als Satz 3 formuliert. In §1.10 zitieren wir einige Resultate der Iterationstheorie. Diese Resultate sowie Satz 3 werden wir dann in §1.11 benutzen, um Satz 2 zu beweisen. Der Beweis von Satz 1 wird dann in §1.12 gegeben. In §1.13 schließlich werden wir einige Bemerkungen über die Anzahl der periodischen Punkte im Kreise $|z| \leq r$ machen. Dort werden wir auch einige offene Probeleme vorstellen.

1.7 Resultate der Wiman-Valiron-Theorie

Es sei $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine ganze Funktion. Der *Zentralindex* von g wird mit $\nu(r,g)$ bezeichnet und ist durch

$$\nu(r,g) = \max\{N : |a_N| r^N = \max_{n \geq 0} |a_n| r^n\}$$

definiert. Mit F bezeichnen wir im folgenden immer eine Ausnahmemenge von r-Werten von endlichem logarithmischen Maß, daß heißt, es gilt

$$\int_{F \cap [1,\infty)} \frac{dr}{r} < \infty.$$

Dabei muß F nicht notwendigerweise bei jedem Auftreten immer dieselbe Menge sein. Eines der Hauptergebnisse der Theorie von Wiman und Valiron über den Zentralindex ist der folgende Hilfssatz (man vgl. etwa [48] oder [69, Kapitel 4]).

Hilfssatz 1 *Es sei g eine ganze transzendente Funktion und K und η seien positive Konstanten. Ist dann $|z_0| = r$, $|g(z_0)| \geq \eta M(r,g)$ und $|\tau| \leq K/\nu(r,g)$, so gilt*

$$g(z_0 e^{\tau}) \sim g(z_0) e^{\nu(r,g)\tau} \qquad (r \notin F) \tag{1.1}$$

und

$$g'(z_0 e^{\tau}) \sim \frac{\nu(r,g)}{z_0 e^{\tau}} g(z_0) e^{\nu(r,g)\tau} \qquad (r \notin F). \tag{1.2}$$

Hier wie im folgenden ist dabei das $\sim$-Zeichen immer in Verbindung mit dem Grenzübergang $r \to \infty$ zu sehen. Entsprechendes gilt für die Landauschen Symbole $o(\cdot)$ und $O(\cdot)$, die wir später verwenden werden.

Wir bemerken an dieser Stelle, daß die Wiman-Valiron-Theorie auch Aussagen über die Ableitungen höherer Ordnung liefert, was beispielsweise zu

Anwendungen in der Theorie der Differentialgleichungen im Komplexen führt (man vgl. z. B. [52]). Diese Aussagen werden hier jedoch nicht benötigt. Die Wiman-Valiron-Theorie hat außer in der Theorie der komplexen Differentialgleichungen auch Anwendungen in vielen anderen Bereichen der Funktionentheorie, in der Iterationstheorie wurde sie jedoch bisher kaum angewandt. Das einzige mir bekannte Beispiel ist eine Arbeit von Eremenko [30], in der mit ihrer Hilfe gezeigt wird, daß eine ganze transzendente Funktion immer Werte besitzt, die unter Iteration nach unendlich streben.

Der folgende Hilfssatz ist eine Folgerung aus Hilfssatz 1 und dem Satz von Rouché. Für einen detaillierten Beweis verweisen wir auf [15, Lemma 2].

Hilfssatz 2 *Es sei g eine ganze transzendente Funktion und K, η und ε seien positive Konstanten. Ist $|\sigma_1| < K$, $|g(z_0)| \geq \eta M(r,g)$ und $|z_0| = r \notin F$, dann existiert τ_1, so daß $|\nu(r,g)\tau_1 - \sigma_1| < \varepsilon$ und $g(z_0 e^{\tau_1}) = g(z_0)e^{\sigma_1}$ gilt. Ist $\varepsilon < 2\pi$ und $r \notin F$ groß genug, so ist τ_1 eindeutig bestimmt.*

Hilfssatz 3 *Es sei g eine ganze transzendente Funktion und C und η seien positive Konstanten. Weiter sei $|z_0| = r$ und $|g(z_0)| \geq \eta M(r,g)$. Ist dann j eine ganze Zahl und $r \notin F$, so existiert eine für $|z - z_0| \leq Cr/\nu(r,g)$ definierte analytische Funktion $\tau_j(z)$ mit der Eigenschaft, daß*

$$|\tau_j(z)\nu(r,g) - 2\pi i j| = o(1),$$

$$g(ze^{\tau_j(z)}) = g(z)$$

und

$$\frac{d}{dz}(ze^{\tau_j(z)}) \sim 1$$

gilt.

Hilfssatz 3 wurde in [17, Lemma 3] für den Fall $j = 1$ bewiesen. Der allgemeine Fall kann mit der gleichen Methode bewiesen werden, worauf auch bereits in [16, Lemma 3] hingewiesen wurde.

Clunie [24, S. 76] hat darauf hingewiesen, daß man (1.1) zum Beweis des folgenden Resultats benutzen kann.

Hilfssatz 4 *Sind h und g ganze transzendente Funktionen, so gilt*

$$M(r, h \circ g) = M((1-o(1))M(r,g), h) \qquad (r \notin F)$$

und

$$M(r, h \circ g) = M(M((1-o(1))r, g), h).$$

1.8 Sätze von Ahlfors, Dufresnoy und Hayman

Eines des wichtigsten Hilfsmittel, das wir benutzen werden, ist das folgende Resultat.

Hilfssatz 5 *Es seien G_1, G_2 und G_3 drei einfach zusammenhängende Gebiete mit paarweise disjunktem Abschluß. Weiter sei $f(z)$ analytisch für $|z - z_0| < R$ und es gebe kein Teilgebiet von $\{z : |z - z_0| < R\}$, das konform auf eines der Gebiete G_j abgebildet wird. Dann gilt*

$$R \leq \frac{2\mu(\log \mu + A)}{|f'(z_0)|},$$

wobei $\mu = \max\{1, |f(z_0)|\}$ ist. Hierbei ist A eine Konstante, die nur von den Gebieten G_j abhängt.

Ein Resultat dieses Typs findet man bei Ahlfors [1, S. 9] und Dufresnoy [29, S. 224]. In der dort gegebenen Version steht jedoch $A(1+|f(z_0)|^2)$ anstelle von $2\mu(\log \mu + A)$. In dieser Form gilt die Behauptung dann auch für meromorphe Funktionen, wenn man fünf statt drei Gebiete nimmt. Wir bemerken noch, daß man diese Ergebnisse aus der Ahlforschen Theorie der Überlagerungsflächen ableiten kann (man vgl. [2] oder [46, Kapitel 5]). Eine Anwendung des Resultats von Ahlfors und Dufresnoy in der Iterationstheorie wurde von Baker [8] gegeben, der dieses Ergebnis benutzte, um zu zeigen, daß die Juliamenge einer ganzen Funktion der Abschluß der Menge der abstoßenden periodischen Punkte ist.

Das Resultat in der von Ahlfors und Dufresnoy gegebenen Form reicht für unsere Zwecke jedoch nicht aus. Wir benötigen Hilfssatz 5 in der oben angegebenen Form, welche im wesentlichen auf Hayman [45] zurückgeht. Man kann Hilfssatz 5 auch direkt aus den Sätzen 6.8, 6.6 and 5.5 seines Buchs [46] ableiten.

1.9 Abstoßende Fixpunkte ganzer Funktionen

In [16] wurde das im vorigen Abschnitt zitierte Resultat von Ahlfors und Dufresnoy dazu verwendet zu zeigen, daß bestimmte zusammengesetzte meromorphe Funktionen unendlich viele abstoßende Fixpunkte haben. In diesem Abschnitt sollen mit einer ähnlichen Methode zusammengesetzte ganze

Funktionen untersucht werden. Dabei werden wir schärfere Ergebnisse erzielen, da wir anstelle des Resultats von Ahlfors und Dufresnoy nun Hilfssatz 5 verwenden können.

Satz 3 *Es seien h und g ganze transzendente Funktionen und es sei $K > 1$ und $\varepsilon > 0$. Man nehme an, daß jeder abstoßende Fixpunkt z' von $h \circ g$ der Ungleichung $|g(z')| < M(|z'|/2, g)$ genüge, bis auf möglicherweise endlich viele Ausnahmen. Ist dann $r \notin F$ und sind w_1 und w_2 komplexe Zahlen, die die Ungleichung*

$$\frac{1}{K} M(r,g) \leq |w_j| \leq K M(r,g) \quad (j = 1,2) \tag{1.3}$$

erfüllen, so gilt

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)} \log |h(w_1)| \leq \log |h(w_2)| \leq (1+\varepsilon) \log |h(w_1)|. \tag{1.4}$$

Beweis. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, daß h, g, K, ε, w_1 und w_2 existieren, welche den Voraussetzungen des Satzes genügen, daß (1.4) aber nicht erfüllt ist. Da die Aussage symmetrisch in w_1 und w_2 ist, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß

$$(1+\varepsilon) \log |h(w_2)| < \log |h(w_1)|.$$

gilt. Wir behaupten nun, daß für hinreichend große r ein w_0 existiert, welches den Ungleichungen

$$\frac{1}{K} M(r,g) \leq |w_0| \leq K M(r,g), \tag{1.5}$$

$$|h(w_0)| \geq |w_0| \tag{1.6}$$

und

$$\frac{|h'(w_0)|}{|h(w_0)| \log |h(w_0)|} \geq \frac{\delta}{|w_0|} \tag{1.7}$$

genügt. Dabei ist δ eine positive Konstante, welche nur von K und ε abhängt. Wir beweisen diese Behauptung nur für den Fall, daß $|w_1| \leq |w_2|$ gilt. Der Fall $|w_2| < |w_1|$ kann ähnlich behandelt werden. Zunächst dürfen wir annehmen, daß $|h(w_1)| = M(|w_1|, h)$ gilt. Außerdem können wir aus (1.3) folgern, daß $|w_2| \leq K^2 |w_1|$ gilt. Daher existiert eine Kurve $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$, deren Länge nicht größer als $(K^2-1+\pi)|w_1|$ ist und die den Bedingungen $\gamma(0)=w_1$, $\gamma(1)=w_2$ und

$$\frac{1}{K}M(r,g) \le |w_1| \le |\gamma(t)| \le |w_2| \le KM(r,g)$$

genügt. Wir definieren nun $t_1 = \inf\{t : (1+\varepsilon)\log|h(\gamma(t))| \le \log|h(w_1)|\}$. Dann gilt $t_1 > 0$ und $\log|h(w_1)| = (1+\varepsilon)\log|h(\gamma(t_1))|$. Außerdem gilt für einen geeigneten Zweig der Logarithmusfunktion

$$|\log h(\gamma(t_1))| \le \log|h(\gamma(t_1))| + \pi \le (1+\frac{\varepsilon}{2})\log|h(\gamma(t_1))|,$$

falls r groß genug ist. Es folgt, daß

$$\begin{aligned} & |\log\log h(w_1) - \log\log h(\gamma(t_1))| \\ \ge\ & \log|\log h(w_1)| - \log|\log h(\gamma(t_1))| \\ \ge\ & \log\log|h(w_1)| - \log\log|h(\gamma(t_1))| - \log(1+\frac{\varepsilon}{2}) \\ =\ & \log(1+\varepsilon) - \log(1+\frac{\varepsilon}{2}) \end{aligned}$$

gilt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \log(1+\varepsilon) - \log(1+\frac{\varepsilon}{2}) &\le |\log\log h(w_1) - \log\log h(\gamma(t_1))| \\ &= |\int_0^{t_1} \frac{h'(\gamma(t))\gamma'(t)}{h(\gamma(t))\log h(\gamma(t))}dt| \\ &\le \max_{0\le t\le t_1} |\frac{h'(\gamma(t))}{h(\gamma(t))\log h(\gamma(t))}| \int_0^{t_1} |\gamma'(t)|dt \\ &\le \frac{|h'(\gamma(t_0))|}{|h(\gamma(t_0))|\log|h(\gamma(t_0))|}(K^2-1+\pi)|w_1|, \end{aligned}$$

wobei t_0 der Wert ist, für den das Maximum angenommen wird. Wir definieren $w_0 = \gamma(t_0)$. Wegen $|w_1| \le |w_0|$ gilt dann (1.7) mit

$$\delta = \frac{\log(1+\varepsilon) - \log(1+\frac{\varepsilon}{2})}{K^2-1+\pi},$$

wenn wir wieder voraussetzen, daß r groß genug ist. Offensichtlich gelten auch (1.5) und (1.6) für hinreichend große r.

Wir wählen jetzt z_0, so daß $|z_0| = r \notin F$ und $|g(z_0)| = M(r,g)$ gilt. Nun gilt $w_0 = e^\sigma g(z_0)$ für ein σ, welches den Ungleichungen $|\text{Re }\sigma| \leq \log K$ und $|\text{Im }\sigma| \leq \pi$ genügt. Daher folgt aus Hilfssatz 2, daß ein s existiert, für das

$$|s| \leq (1+o(1))\frac{\log K + \pi}{\nu(r,g)}$$

und $g(z_0 e^s) = w_0$ gilt. Wir definieren $u_0 = z_0 e^s$. Dann gilt $g(u_0) = w_0$ und

$$|u_0 - z_0| = r|e^s - 1| \leq (1+o(1))\frac{(\log K + \pi)r}{\nu(r,g)} \leq \frac{(\log K + 4)r}{\nu(r,g)},$$

für genügend große r und aus (1.2) folgt

$$|g'(u_0)| \sim |\frac{\nu(r,g)}{r} g(u_0)| = \frac{\nu(r,g)}{r}|w_0|.$$

Weiter definieren wir

$$f(z) = \frac{\nu(r,g)}{u_0}(h(g(z)) - u_0).$$

Wegen (1.6) gilt dann

$$|f(u_0)| \sim \frac{\nu(r,g)}{r}|h(w_0) - u_0| \sim \frac{\nu(r,g)}{r}|h(w_0)|. \tag{1.8}$$

Insbesondere folgt hieraus wegen (1.5) und (1.6) auch $|f(u_0)| > 1$ für hinreichend große r. Desweiteren ist es nicht schwer einzusehen, daß $\log \nu(r,g) = o(\log M(r,g))$ für $r \notin F$ gilt. Damit erhält man

$$\log|f(u_0)| \sim \log|h(w_0)|. \tag{1.9}$$

Darüberhinaus gilt

$$|f'(u_0)| \sim \frac{\nu(r,g)}{r}|h'(g(u_0))g'(u_0)| \sim \frac{\nu(r,g)^2}{r^2}|h'(w_0)w_0| \tag{1.10}$$

wegen (1.2). Kombiniert man die letzten drei Gleichungen mit (1.7), so erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{2|f(u_0)|(\log|f(u_0)| + A)}{|f'(u_0)|} \\ = \quad & (1+o(1))\frac{2|h(w_0)|\log|h(w_0)|r}{|w_0 h'(w_0)|\nu(r,g)} \qquad (1.11) \\ \leq \quad & \frac{3}{\delta}\frac{r}{\nu(r,g)}, \end{aligned}$$

falls A eine gegebene Konstante und falls $r \notin F$ genügend groß ist.

Wir wählen nun eine ganze Zahl N mit $N > 5/\delta$ und wenden Hilfssatz 5 für die Gebiete $G_j = D(2\pi i j N, 5/\delta)$ an. Hier und im folgenden bezeichnet dabei $D(a, R)$ immer die (offene) Kreisscheibe vom Radius R um den Punkt a. Es folgt, daß $j \in \{1, 2, 3\}$ und ein Gebiet G, welches in $D(u_0, 3r/\delta\nu(r, g))$ enthalten ist, existieren, so daß G durch f konform auf G_j abgebildet wird, vorausgesetzt natürlich wieder, daß $r \notin F$ groß genug ist. Wir wählen jetzt τ_{-jN} gemäß Hilfssatz 3 und definieren $\sigma(z) = z \exp(\tau_{-jN}(z))$. Darüberhinaus definieren wir noch $u_j = u_0(1+2\pi i j N/\nu(r, g))$. Es ist nicht schwer einzusehen, daß $D(u_0, 3r/\delta\nu(r, g)) \subset \sigma(D(u_j, 4r/\delta\nu(r, g)))$ gilt, falls wieder $r \notin F$ groß genug ist. Daher existiert ein Gebiet H, welches in $D(u_j, 4r/\delta\nu(r, g))$ enthalten ist und durch $\sigma(z)$ konform auf G abgebildet wird. Die Funktion $f(\sigma(z))$ bildet dann H konform auf G_j ab und daher bildet $h(g(\sigma(z)))$ das Gebiet H konform auf $D(u_j, 5|u_0|/\delta\nu(r, g))$ ab. Nach Hilfssatz 3 gilt $h(g(z)) = h(g(\sigma(z)))$. Folglich bildet $h(g(z))$ das Gebiet H konform auf $D(u_j, 5|u_0|/\delta\nu(r, g))$ ab. Da für genügend große $r \notin F$ der Abschluß von H in $D(u_j, 5|u_0|/\delta\nu(r, g))$ enthalten ist, können wir wie Baker in [8, S. 255] aus dem Satz von Rouché und dem Schwarzschen Lemma ableiten, daß die Umkehrfunktion von $h \circ g$ einen anziehenden Fixpunkt z' in H hat. Offensichtlich ist z' dann ein abstoßender Fixpunkt von $h \circ g$.

Als nächstes notieren wir, daß

$$\begin{aligned} |z' - z_0| &\leq |z' - u_j| + |u_j - u_0| + |u_0 - z_0| \\ &\leq \frac{5|u_0|}{\delta\nu(r, g)} + \frac{2\pi j N |u_0|}{\nu(r, g)} + \frac{(\log K + 4)r}{\nu(r, g)} \\ &\leq \frac{Cr}{\nu(r, g)} \end{aligned}$$

gilt, falls C eine Konstante mit $C > 5/\delta + 2\pi j N + \log K + 4$ und falls $r \notin F$ ist. Daraus folgt, daß z' von der Form $z' = z_0 e^t$ für ein t mit $|t| \leq (1 + o(1))C/\nu(r, g)$ ist. Wegen Hilfssatz 1 gilt daher

$$|g(z')| \geq (1 + o(1))e^{-C} M(r, g) \geq M(\frac{|z'|}{2}, g), \tag{1.12}$$

falls $r \notin F$ groß genug ist.

Da z_0 und damit auch z' beliebig groß gewählt werden können, erhalten wir insgesamt einen Widerspruch zur Voraussetzung, daß nur endlich viele abstoßende Fixpunkte z' existieren, die der Ungleichung (1.12) genügen. Damit ist Satz 3 bewiesen.

1.10 Ergebnisse aus der Iterationstheorie

In den Beweisen der Sätze 1 und 2 werden wir einige Ergebnisse über anziehende und rational indifferente periodische Punkte verwenden. Die Resultate über rational indifferente periodische Punkte, die wir benötigen, sind in dem folgenden Hilfssatz zusammengefaßt. Sie gehen im wesentlichen auf Fatou [34, Kapitel 2 und 4] zurück. Eine etwas modernere Darstellung findet man beispielsweise in dem Übersichtsartikel von Lyubich [55, §1.10]. Obwohl Fatou and Lyubich sich auf die Iteration rationaler Funktionen beschränken, gelten die Ergebnisse auch für ganze Funktionen. Wir bemerken noch, daß die Fatouschen Resultate von Baker [7] zum Beweis des in §1.4 zitierten Satzes A benutzt wurden. Unsere Darstellung der Fatouschen Ergebnisse folgt denen von Baker [7, Lemma 4] und Lyubich [55, §1.10].

Hilfssatz 6 *Es sei f eine ganze Funktion und es sei z_0 ein periodischer Punkt der primitiven Periode p. Man nehme an, daß z_0 rational indifferent sei und bezeichne mit t die kleinste natürliche Zahl, für die $(f_p'(z_0))^t = 1$ gilt. Dann hat f_{pt} eine Taylorentwicklung der Form*

$$f_{pt}(z) = z_0 + (z - z_0) + \sum_{\nu=m+1}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu \quad (a_{m+1} \neq 0),$$

wobei m von der Form $m = kt$ mit einer natürlichen Zahl k ist. Definiert man $z_j = f_j(z_0)$ für $1 \leq j \leq p-1$, dann existieren zu jedem j mit $0 \leq j \leq p-1$ genau m Komponenten D_{ij} $(1 \leq i \leq m)$ der Fatoumenge von f, welche z_j als Randpunkt enthalten und die darüberhinaus die Eigenschaft haben, daß $\lim_{\nu\to\infty} f_{\nu p}(z) = z_j$ für $z \in D_{ij}$ gilt. Die Gebiete D_{ij} werden Leaugebiete genannt. Die Menge der $pm = pkt$ Leaugebiete D_{ij} zerfällt in k paarweise disjunkte Teilmengen, die sogenanten Zykel von Leaugebieten, die jeweils aus pt Leaugebieten bestehen, welche durch f zyklisch vertauscht werden. Jeder Zykel von Leaugebieten enthält mindestens eine Singularität von f_{-1}, der Umkehrfunktion von f.

Darüberhinaus enthalten die Leaugebiete D_{ij} Teilgebiete L_{ij}, die wir Leaublätter nennen und die die Eigenschaft haben, daß z_0 auf ihrem Rand liegt und daß sie von stückweise analytischen Kurven berandet werden. Es sei L die Vereinigung aller L_{ij} und es sei $\varepsilon > 0$. Die Leaublätter L_{ij} können dann so gewählt werden, daß $f(L) \subset L$ und $L_{ij} \subset D(\varepsilon, z_j)$ für alle i und j gilt.

Bei anziehenden periodischen Punkten sind die Verhältnisse einfacher. Sie sind in dem folgenden Hilfssatz zusammengefaßt (man vgl. z. B. [34, Kapitel

4] oder [55, §1.8]).

Hilfssatz 7 *Es sei f eine ganze Funktion und z_0 sei ein anziehender periodischer Punkt der primitiven Periode p. Man definiere $z_j = f_j(z_0)$ für $1 \leq j \leq p-1$, bezeichne mit D_j die Komponente der Fatoumenge, die z_j enthält, und definiere D als die Vereinigung aller D_j, $0 \leq j \leq p-1$. Dann enthält D mindestens eine Singularität von f_{-1}.*

Desweiteren benötigen wir ein Resultat, welches besagt, daß die Leaugebiete und die Gebiete D_j in Hilfssatz 7 unter gewissen Voraussetzungen beschränkt sind. Dies wurde von Bhattacharyya [20, Theorem 1] bewiesen, wenn die Ordnung von f kleiner als $\frac{1}{2}$ ist oder wenn f Ordnung $\frac{1}{2}$ und Typ 0 hat. Wir werden Bhattacharyyas Ideen zum Beweis des folgenden Ergebnisses benutzen.

Hilfssatz 8 *Es sei f eine ganze Funktion und es sei z_0 ein rational indifferenter oder anziehender periodischer Punkt der primitiven Periode p. Für $1 \leq j \leq p-1$ definiere man $z_j = f_j(z_0)$. Falls z_0 rational indifferent ist, so bezeichne man mit D die Vereinigung der Leaugebiete, die eines der z_j, $0 \leq j \leq p-1$, als Randpunkt haben. Falls z_0 anziehender periodischer Punkt ist, so sei D wie in Hilfssatz 7. Man nehme an, daß eine einfach geschlossene Kurve Γ_0 existiere, für die $\Gamma_0 \cap f(\Gamma_0) = \emptyset$ und $\Gamma_0 \subset f(\operatorname{int}(\Gamma_0))$ gilt. Dabei bezeichnet $\operatorname{int}(\Gamma_0)$ das Innere von Γ_0. Desweiteren gelte $z_j \in \operatorname{int}(\Gamma_0)$ für $0 \leq j \leq p-1$. Dann gilt $D \subset \operatorname{int}(\Gamma_0)$.*

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall, daß z_0 rational indifferent ist. Der Fall, daß z_0 anziehend ist, kann ähnlich behandelt werden. Es sei L die Vereinigung der Leaublätter der z_j, die wir gemäß Hilfssatz 6 so wählen, daß $f(L) \subset L$ und $L \subset \operatorname{int}(\Gamma_0)$ gilt. Wir nehmen an, daß $D \not\subset \operatorname{int}(\Gamma_0)$ gilt, das heißt, es gilt $D \cap \Gamma_0 \neq \emptyset$. Dann existiert eine Kurve γ, die in D enthalten ist und eines der Leaublätter mit Γ_0 verbindet. Da γ eine kompakte Teilmenge von D ist, existiert ein j mit $0 \leq j \leq p-1$, so daß $\lim_{\nu\to\infty} f_{\nu p}(z) = z_j$ gleichmäßig für $z \in \gamma$ gilt. (Wir identifizieren hier und auch im folgenden desöfteren die Spur einer Kurve mit der Kurve selbst.) Andererseits sieht man leicht ein, daß zu jedem $\nu \geq 1$ ein $z_\nu \in \gamma$ mit $f_\nu(z_\nu) \in \Gamma_0$ existiert. Dies ist ein Widerspruch und Hilfssatz 8 ist bewiesen.

1.11 Beweis von Satz 2 und Folgerung 1

Beweis von Satz 2. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, daß f nur endlich viele abstoßende periodische Punkte der primitiven Periode n hat. Zunächst definieren wir $l = \max\{p : p < n, p|n\}$ und $h = f_l$. Darüberhinaus setzen wir noch $m = n - l$ und $g = f_m$. Zunächst zeigen wir, daß dann die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt sind. Dazu sei z' ein abstoßender Fixpunkt von $h \circ g$, das heißt, z' sei ein abstoßender periodischer Punkt von f der Periode n. Aufgrund unserer Annahme existieren nur endlich viele abstoßende periodische Punkte der primitiven Periode n. Daher hat z' eine primitive Periode j mit $j < n$, falls $|z'|$ groß genug ist. Offensichtlich gilt $1 \leq j \leq l \leq m$. Es folgt, daß

$$|g(z')| = |f_m(z')| = |f_{m-j}(f_j(z'))| = |f_{m-j}(z')| \leq M(|z'|, f_{m-j}).$$

Außerdem gilt

$$|z'| < \frac{1}{2}M(\frac{|z'|}{2}, f_j),$$

wenn $|z'|$ groß genug ist. Die letzten beiden Ungleichungen ergeben zusammen mit Hilfssatz 4 nun

$$|g(z')| < M(\frac{1}{2}M(\frac{|z'|}{2}, f_j), f_{m-j}) \leq M(\frac{|z'|}{2}, f_m) = M(\frac{|z'|}{2}, g),$$

falls $j < m$ gilt und falls $|z'|$ hinreichend groß ist. Falls aber $j = m$ gilt, dann erhalten wir $|g(z')| = |z'| < M(|z'|/2, g)$ für genügend große $|z'|$. Insgesamt sehen wir, daß die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt sind. Ähnlich können wir einsehen, daß die Voraussetzungen von Satz 3 auch dann erfüllt sind, wenn wir die Rollen von g und h vertauschen.

Es folgt nun aus Satz 3 (mit g und h vertauscht), daß eine unbeschränkte Folge (t_ν) existiert, so daß

$$\log|g(z)| \sim \log M(t_\nu, g) \tag{1.13}$$

für $|z| = t_\nu$ gilt. Es sei nun δ eine positive Konstante, die kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Wir wählen s_ν, so daß $s_\nu \notin F$ und $(t_\nu)^{1-2\delta} \leq s_\nu \leq (t_\nu)^{1-\delta}$ gilt, was für genügend große ν möglich ist. Aus dem Hadamardschen Dreikreisesatz können wir ableiten, daß

$$\log M(r^\eta, g) \geq (1 - o(1))\eta \log M(r, g) \tag{1.14}$$

für jedes feste $\eta > 1$ gilt. Daraus erhalten wir

$$\log M(s_\nu, g) \leq (1 + o(1))(1 - \delta) \log M(t_\nu, g) < \log |g(z)|$$

für $|z| = t_\nu$, falls wieder ν genügend groß ist. Aus einem Ergebnis von Baker [3, S. 129] (vgl. auch [4, S. 147]) folgt nun, daß eine einfach geschlossene Kurve Γ existiert, die im Kreisring $s_\nu \leq |z| \leq t_\nu$ enthalten ist, die den Ursprung einmal umläuft und auf der $|g(z)| = M(s_\nu, g)$ gilt. Da wir $s_\nu \notin F$ gewählt haben, folgt aus Satz 3, daß für $z \in \Gamma$

$$\begin{aligned} \log |f_n(z)| &= \log |h(g(z))| \\ &= (1 + o(1)) \log M(M(s_\nu, g), h) \\ &\geq (1 + o(1)) \log M(s_\nu, f_n) \end{aligned} \tag{1.15}$$

gilt. Wir wählen jetzt r_ν, so daß $r_\nu \notin F$ und $(s_\nu)^{1-2\delta} \leq r_\nu \leq (s_\nu)^{1-\delta}$ gilt. Dann gilt wegen (1.14) und (1.15) auch $\log |f_n(z)| > \log M(r_\nu, f_n)$ für $z \in \Gamma$, wenn ν groß genug ist. Das bereits oben benutzte Argument von Baker zeigt nun, daß eine einfach geschlossene Kurve Γ_0 existiert, die in $\mathrm{int}(\Gamma)$, dem Innern von Γ, enthalten ist, die den Ursprung einmal umläuft und auf der $|f_n(z)| = M(r_\nu, f_n)$ gilt. Selbstverständlich ist Γ_0 im Kreisring $r_\nu \leq |z| \leq t_\nu$ enthalten. Außerdem können wir durch eine geeignete Wahl von δ auch $t_\nu \leq (r_\nu)^{1+\varepsilon}$ erreichen, falls ε eine gegebene positive Zahl ist. Desweiteren können wir durch eine geeignete Wahl von r_ν erreichen, daß $f_k'(z) \neq 0$ für $z \in \Gamma_0$ und $1 \leq k \leq n$ gilt.

Wir definieren $G_0 = \mathrm{int}(\Gamma_0)$, das heißt, Γ_0 ist der Rand von G_0. Für $1 \leq k \leq n$ definieren wir $G_k = f_k(G_0)$ und bezeichnen den Rand von G_k mit Γ_k. Offensichtlich ist dann Γ_n der Kreis um den Ursprung mit Radius $M(r_\nu, f_n)$. Weiter sieht man leicht ein, daß für $1 \leq k \leq n-1$ und ν genügend groß $\Gamma_k \subset \{z : M(r_\nu, f_k)/2 \leq |z| \leq M(t_\nu, f_k)\} \subset G_{k+1}$ gilt und daß Γ_k eine einfach geschlossene Kurve ist, die den Ursprung einmal umläuft. Läuft jedoch $z(t)$ einmal durch Γ_k, so läuft $f(z(t))$ mehrere Male durch Γ_{k+1}, etwa p_{k+1}-mal. Aus dem Argumentprinzip folgt nun, daß die Gleichung $f(z) = a$ für jedes $a \in G_k$ genau p_k Lösungen in G_{k-1} hat, gezählt entsprechend der Vielfachheit. Ist also $a \in G_k$, so nimmt f_k den Wert a genau P_k-mal in G_0 an, wobei $P_k = p_1 p_2 \cdots p_k$ ist. Aus dem Satz von Rouché folgt nun, daß f_k genau P_k Fixpunkte in G_0 hat, gezählt entsprechend der Vielfachheit als Nullstellen von $f_k(z) - z$. Außerdem hat f' genau $p_{k+1} - 1$ Nullstellen in G_k, wiederum entsprechend der Vielfachheit gezählt. Die letztere Überlegung folgt zum Beispiel aus der Riemann-Hurwitz-Formel (man vgl. etwa [55, §1.5] für Anwendungen dieser Formel in der Iterationstheorie).

Die Funktion f, als Abbildung von G_k auf G_{k+1} betrachtet, verhält sich in vielerlei Hinsicht wie ein Polynom vom Grad p_{k+1}. In der Tat ist sie eine polynomähnliche Abbildung vom Grad p_{k+1} im Sinne von Douady und Hubbard [28]. Im folgenden werden wir die Resultate von Douady und Hubbard über polynomähnliche Abbildungen jedoch nicht benötigen, sondern die einfachen Eignschaften, die wir oben notiert haben, reichen für unsere Zwecke aus.

Wir bemerken noch, daß p_k und damit auch P_k nicht nur von k, sondern auch von ν abhängen. Man sieht tatsächlich leicht ein, daß $p_k \to \infty$ für $\nu \to \infty$ gilt. Daraus folgt, daß P_n, die Anzahl der periodischen Punkte der Periode n in G_0, viel größer als P_k ist, wenn $k < n$ ist. Hieraus allein folgt jedoch noch nicht, daß periodische Punkte der primitiven Periode n existieren, da wir auch die Vielfachheiten der periodischen Punkte berücksichtigen müssen.

Mit $\overline{P}_n$ bezeichnen wir die Anzahl der periodischen Punkte der Periode n in G_0, wobei die Vielfachheiten nicht gezählt werden. Die P_n und $\overline{P}_n$ entsprechenden Anzahlen der periodischen Punkte der primitiven Periode n in G_0 bezeichnen wir mit N_n und $\overline{N}_n$. Dann gilt

$$\overline{P}_n - \overline{N}_n \leq \sum_{k<n,k|n} \overline{P}_k \leq \sum_{k<n,k|n} P_k.$$

Damit erhalten wir

$$\overline{N}_n \geq \overline{P}_n - \sum_{k<n,k|n} P_k = P_n - \sum_{k<n,k|n} P_k - (P_n - \overline{P}_n).$$

Ist z_0 ein periodischer Punkt der Periode n, der zur Differenz $P_n - \overline{P}_n$ beiträgt, so gilt $f_n'(z_0) = 1$. Hat z_0 die primitive Periode p und ist t gemäß Hilfssatz 6 gewählt, so ist $pt \leq n$. Aus Hilfssatz 6 folgt nun, daß wenn z_0 als Nullstelle von $f_n(z) - z$ die Vielfachheit $m+1$ hat, dann enthalten die mit z_0 assoziierten Leaugebiete mindestens $\frac{m}{t}$ Singularitäten von f_{-1}. Wegen (1.15) hat f keine asymptotischen Werte. Daher (vgl. [69, Anhang D]) sind die einzigen Singularitäten von f_{-1} die Werte $f(c)$, für die $f'(c) = 0$ gilt. Tatsächlich sind diese Werte $f(c)$ sogar Singularitäten der Umkehrfunktion der Einschränkung von f auf den entsprechenden Zykel von Leaugebieten, welcher nach Hilfssatz 8 in G_{p-1} enthalten ist. Daher enthält dieser Zykel von Leaugebieten eine Nullstelle von f'. Folglich existieren mindestens $\frac{m}{t}$

Nullstellen von f' in G_{p-1}, die unter Iteration von f_p gegen ein $f_j(z_0)$ mit $0 \leq j \leq p-1$ konvergieren. Nun ist der Beitrag von $\{f_j(z_0) : 0 \leq j \leq p-1\}$ zur Differenz $P_n - \overline{P}_n$ gleich pm. Da $G_{p-1} \subset G_{n-1}$ und $\frac{m}{t} \geq \frac{pm}{n}$ gilt und weil außerdem f' genau $p_n - 1$ Nullstellen in G_{n-1} hat, erhalten wir insgesamt die Abschätzung $P_n - \overline{P}_n \leq n(p_n - 1)$. Dies liefert nun

$$\overline{N}_n \geq P_n - \sum_{k<n, k|n} P_k - n(p_n - 1).$$

Weil $p_k \to \infty$ für $\nu \to \infty$ gilt, folgt hieraus, daß $\overline{N}_n \to \infty$ für $\nu \to \infty$ gilt. Damit ist zunächst einmal die in §1.5 zitierte Vermutung von Baker bewiesen.

Um Satz 2 zu beweisen, zerlegen wir $\overline{N}_n$ in eine Summe $\overline{N}_n = \overline{N}_{\text{anz}} + \overline{N}_{\text{rat}} + \overline{N}_{\text{irr}} + \overline{N}_{\text{abs}}$, wobei $\overline{N}_{\text{anz}}$, $\overline{N}_{\text{rat}}$, $\overline{N}_{\text{irr}}$ und $\overline{N}_{\text{abs}}$ die Anzahlen der anziehenden, rational indifferenten, irrational indifferenten und abstoßenden periodischen Punkte der primitiven Periode n in G_0 bezeichnen.

Zunächst bemerken wir, daß nach den Hilfssätzen 6 und 7 jeder anziehende oder rational indifferente periodische Zykel eine Singularität von f_{-1} anzieht, und damit auch eine Nullstelle von f'. Wie oben erhalten wir $\overline{N}_{\text{anz}} + \overline{N}_{\text{rat}} \leq n(p_n - 1)$.

Wir wollen jetzt $\overline{N}_{\text{irr}}$ abschätzen. Dazu sei Q ein Polynom, welches für alle periodischen Punkte z_0 von f, die die Periode n haben und in G_{n-1} enthalten sind, den Bedingungen $Q(z_0) = 0$ und $Q'(z_0) = f'(z_0)$ genügt. (Die Existenz eines solchen Polynoms ist klar.) Für $0 < \xi < 1$ definieren wir nun $F(z) = f(z) - \xi Q(z)$. Offensichtlich ist jeder in G_0 enthaltene periodische Punkt von f der Periode n auch ein periodischer Punkt von F der Periode n. Außerdem gilt $F_n'(z_0) = (1-\xi)^n f_n'(z_0)$ für jeden periodischen Punkt z_0 von f, der die Periode n hat und der in G_0 enthalten ist. Damit sind die in G_0 enthaltenen indifferenten periodischen Punkte von f der Periode n anziehende periodische Punkte von F der Periode n. Außerdem sind die die in G_0 enthaltenen anziehenden periodischen Punkte von f der Periode n auch für F anziehende periodische Punkte der Periode n. Nach Hilfssatz 7 zieht jeder dieser anziehenden periodischen Punkte der Periode n von F in G_0 eine Singularität von F_{-1} an. Wie oben erhalten wir, daß damit auch eine Nullstelle von F' angezogen wird, die darüberhinaus noch in G_{n-1} liegt, wenn ξ klein genug ist. Nach dem Satz von Hurwitz haben F' and f' die gleiche Anzahl von Nullstellen in G_{n-1}, falls ξ klein genug ist. Da f' genau $p_n - 1$ Nullstellen in G_{n-1} hat, hat F höchstens $n(p_n - 1)$ anziehende periodische Punkte der Periode n in G_0. Damit erhalten wir schärfer als oben sogar

$\overline{N}_{\text{anz}} + \overline{N}_{\text{rat}} + \overline{N}_{\text{irr}} \leq n(p_n - 1)$. Insgesamt gilt also

$$\overline{N}_{\text{abs}} = \overline{N}_n - \overline{N}_{\text{anz}} - \overline{N}_{\text{rat}} - \overline{N}_{\text{irr}} \geq P_n - \sum_{k<n, k|n} P_k - 2n(p_n - 1).$$

Daher gilt $\overline{N}_{\text{abs}} \to \infty$ für $\nu \to \infty$, im Widerspruch zu unserer Annahme. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Beweis von Folgerung 1. Bereits Baker [6, S. 284] hat darauf hingewiesen, daß Folgerung 1 eine direkte Konsequenz von Satz 2 ist. Wir führen den kurzen Beweis nur der Vollständigkeit wegen aus und folgen dem Argument von Baker. Wir nehmen an, daß $F(z) = f_n(z)$ für ein n mit $n \geq 2$ gilt. Nach Satz 2 existiert ein periodischer Punkt z_0 von f der primitiven Periode n. Für $1 \leq j \leq n-1$ setzen wir nun $z_j = f_j(z_0)$. Dann gilt $z_i \neq z_j$, aber $F'(z_i) = f_n'(z_i) = f_n'(z_j) = F'(z_j)$ für $0 \leq i < j \leq n-1$. Das widerspricht unserer Voraussetzung und damit ist Folgerung 1 bewiesen.

1.12 Beweis von Satz 1

Es sei p also ein Polynom vom Grad $d \geq 2$ und es sei $n \geq 2$. Weiter sei $R > 0$. Wir setzen $\Gamma_n = \{z : |z| = R\}$ und für $0 \leq j \leq n-1$ setzen wir $\Gamma_j = \{z : |p_{n-j}(z)| = R\}$. Ist R genügend groß, so sind die Γ_j Jordankurven, deren Inneres wir mit G_j bezeichnen. Für genügend große R und $0 \leq j \leq n-1$ gilt dann $\Gamma_j \subset G_{j+1}$ und $p(G_j) = G_{j+1}$.

Die Kurven Γ_j haben damit dieselben Eigenschaften wie gleichnamigen Kurven im Beweis von Satz 2. (Dort war die Hauptschwierigkeit, die Existenz dieser Kurven zu zeigen, während dies hier fast trivial ist.) Wir können nun völlig analog zum zweiten Teil des Beweises von Satz 2 vorgehen, wenn wir die dort auftretenden Werte p_k durch d ersetzen. Für die Anzahl N der abstoßenden periodischen Punkte der primitiven Periode n erhalten wir dann die Abschätzung

$$N \geq d^n - \sum_{k<n, k|n} d^k - 2n(d-1).$$

Für $n = 2$ ergibt sich $N \geq d^2 - d - 4(d-1) = (d-1)(d-4)$ und damit $N > 0$ falls $d > 4$.

Für $n = 3$ erhalten wir $N \geq d^3 - d - 6(d-1) = (d-1)(d-2)(d+3)$ und es folgt $N > 0$ falls $d > 2$.

Wir betrachten jetzt den Fall $n \geq 4$. Mit m bezeichnen wir die größte ganze Zahl, die nicht größer als $\frac{n}{2}$ ist. Wegen $n \geq 4$ gilt dann $m \leq n-2$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}
N &\geq d^n - \sum_{k \leq m} d^k - 2n(d-1) \\
&= d^n - \frac{d^{m+1}-d}{d-1} - 2n(d-1) \\
&\geq d^n - d^{m+1} + d - 2n(d-1) \\
&\geq d^n - d^{n-1} + d - 2n(d-1) \\
&= (d^{n-1} - 2n)(d-1) + d \\
&\geq (2^{n-1} - 2n) + d \\
&\geq d.
\end{aligned}$$

Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Bemerkung Bezeichnet M die Anzahl der nicht notwendigerweise abstoßenden periodischen Punkte der primitiven Periode n, so erhält man analog wie oben

$$M \geq d^n - \sum_{k<n, k|n} d^k - n(d-1). \tag{1.16}$$

Es folgt, daß $M > 0$ gilt, außer möglicherweise im Fall $d = n = 2$. Untersucht man jetzt noch den Fall $d = n = 2$, so erhält man Satz A. Der hier skizzierte Beweis von Satz A, der darin besteht, aus Hilfssatz 6 die Ungleichung (1.16) herzuleiten, ist im wesentlichen der Beweis, der auch von Baker [7] gegeben wurde.

1.13 Bemerkungen und offene Fragen

Einige interessante Fragen betreffen die Anzahl der periodischen Punkte der Periode n einer ganzen transzendenten Funktion f im Kreise $|z| \leq r$, die wir - wie in der Nevanlinnaschen Wertverteilungstheorie üblich - mit $n(r, 1/(f_n(z) - z))$ bezeichnen. Diese Anzahl wurde von Baker [4] für Funktionen, deren Ordnung kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, und in [18] für Funktionen, die endliche Ordnung und positive untere Ordnung haben, abgeschätzt. Im allgemeinen Fall weiß man jedoch sehr wenig über diese Anzahl, zumindest ist mir keine untere Schranke für sie bekannt, die über das Rosenbloomsche

Resultat $\lim_{r\to\infty} n(r, 1/(f_n(z) - z)) = \infty$ hinausgeht. (Natürlich wird eine solche untere Schranke außer von n auch von $M(r, f)$ oder anderen Wachstumsgrößen von f abhängen.) Obwohl die Methoden dieser Arbeit benutzt werden können, um eine untere Schranke für $n(r, 1/(f_n(z) - z))$ zu finden, scheinen sie mir nicht geeignet, gute Abschätzungen dafür zu erzielen. Wir weisen an dieser Stelle noch einmal auf die von Baker [6, S. 284] aufgeworfene Frage hin, ob $N(r, 1/(f_n(z) - z))$ und $T(r, f_n)$ immer von der gleichen Größenordnung sind. (Dabei ist $T(r, f_n)$ die Nevanlinnasche Charakteristik von f_n und $N(r, 1/(f_n(z) - z))$ ist die Nevanlinnasche Anzahlfunktion, die im Falle $f_n(0) \neq 0$ bekanntlich durch

$$N(r, \frac{1}{f_n(z) - z}) = \int_0^r \frac{n(t, \frac{1}{f_n(z) - z})}{t} dt$$

gegeben ist, man vgl. z. B. [46, 52] für eine Einführung in die Nevanlinnasche Theorie.)

Genauso kann man natürlich nach der Anzahl der abstoßenden periodischen Punkte der primitiven Periode n von f im Kreise $|z| \leq r$ fragen. Unter Benutzung der Resultate von Baker [4] kann man eine untere Schranke für diese Anzahl gewinnen, wenn die Ordnung von f kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Baker [4, Lemma 1] zeigt, ohne weitere Annahmen über die periodischen Punkte von f, daß eine ähnliche Gleichung wie (1.15) gilt, wenn die Ordnung von f kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Es gibt nur zwei Unterschiede zwischen seiner Gleichung und (1.15). Zum einen erhält er nicht $(t_\nu)^{1-2\delta} \leq s_\nu$ für jedes vorgegebene positive δ, sondern nur $(t_\nu)^\sigma \leq s_\nu$ für ein positives σ, das von n und der Ordnung von f abhängt. Zum andern gilt seine Gleichung für alle genügend großen s_ν, nicht nur auf einer unbeschränkten Folge von s_ν-Werten. Baker [4, Theorem 1] folgert aus seiner Ungleichung, daß $N(r, 1/(f_n(z) - z)) \geq (1 - o(1)) \log M(r^\sigma, f_n)$ gilt. Er weist darauf hin, daß hieraus folgt, daß $N(r, 1/(f_n(z) - z))$ für $n > p$ viel größer als $N(r, /1(f_p(z) - z))$ ist, aber daß dies seine in §1.5 zitierte Vermutung nicht für Funktionen der Ordnung kleiner als $\frac{1}{2}$ beweist, da die N-Funktionen gemäß der Vielfachheit zählen. Die Vielfachheiten und die Anzahl der anziehenden und indifferenten periodischen Punkte können jedoch mit der im Beweis von Satz 2 verwendeten Methode abegeschätzt werden. Tut man dies, so erhält man das folgende Ergebnis.

Es sei f eine ganze transzendente Funktion, deren Ordnung kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, und es sei $n \geq 2$. Mit $n(r)$ sei die Anzahl der abstoßenden periodischen Punkte der primitiven Periode n in $0 < |z| \leq r$ bezeichnet. Weiter sei $N(r) =$

$\int_0^r (n(t)/t)dt$. *Dann existiert eine positive Zahl* σ, *die nur von* n *und der Ordnung von* f *abhängt, so daß* $N(r) \geq \log M(r^\sigma, f_n)$ *für alle genügend großen* r *gilt.*

Es scheint mir nicht unwahrscheinlich, daß die obige Abschätzung für alle ganzen transzendenten Funktionen gilt, ohne zusätzliche Voraussetzungen über die Ordnung. Möglicherweise gilt sie auch für jedes σ mit $\sigma < 1$.

Statt der Anzahl der abstoßenden periodischen Punkte kann man natürlich auch die Anzahl der anziehenden und indifferenten periodischen Punkte untersuchen. Es ist bekannt (vgl. [34, 64]), daß rationale Funktionen nur endlich viele anziehende und indifferente periodische Punkte haben. Ganze transzendente Funktionen können hingegen unendlich viele anziehende und indifferente periodische Punkte haben, wie bereits in §1.3 durch ein Beispiel belegt wurde. Man kann jedoch fragen, ob es eine obere Schranke für ihre Anzahl im Kreise $|z| \leq r$ gibt, die von $T(r, f)$ oder $\log M(r, f)$ abhängt und die über die triviale Abschätzung $N(r, 1/(f_n(z) - z)) \leq T(r, f_n) + O(\log r)$ hinausgeht.

Kapitel 2

Zusammensetzung ganzer Funktionen

2.1 Einführung und Formulierung der Ergebnisse

Im ersten Kapitel haben wir uns mit der Iteration ganzer Funktionen beschäftigt. Ziel dieses Kapitels ist es zu zeigen, daß einige der Ergebnisse über *iterierte* Funktionen allgemeiner auch für *zusammengesetzte* Funktionen gelten.

Ein erstes Ergebnis in dieser Richtung wurde von Rosenbloom [62] im Jahre 1952 erzielt. Er zeigte, daß wenn h und g ganze transzendente Funktionen sind, dann hat mindestens eine der beiden Funktionen h und $h \circ g$ unendlich viele Fixpunkte. Dies ist eine Verallgemeinerung seines Resultats [61] von 1948, daß die n-te Iterierte h_n für $n \geq 2$ unendlich viele Fixpunkte besitzt. Dies sieht man unmittelbar ein, wenn man $g = h_{n-1}$ setzt.

Gross (siehe [33, S. 542, Problem 32], [39, S. 247, Problem 5] und [40, 41, 75, 78]) hat im Jahre 1966 die Vermutung aufgestellt, daß $h \circ g$ immer unendlich viele Fixpunkte hat, wenn h und g ganze nichtlineare Funktionen sind, von denen wenigstens eine transzendent ist. Dies war von Rosenbloom bereits für den Fall bewiesen worden, daß h ein (nichtlineares) Polynom ist. Gross selbst erzielte auch eine Reihe von Resultaten in diesem Zusammenhang. Wir erwähnen das Ergebnis von Gross und Yang [44] aus dem Jahre 1972, daß $h \circ g$ unendlich viele Fixpunkte hat, wenn $h \circ g$ endliche Ordnung hat oder wenn g ein nichtlineares Polynom ist, und das Ergebnis von Gross und Osgood [42] aus dem Jahre 1983, daß $h \circ g$ unendlich viele Fixpunkte hat, wenn eine der Funktionen h und g endliche Ordnung hat und die andere endliche untere Ordnung hat. Weitere Teilergebnisse bezüglich der Gross'schen Vermutung findet man etwa in [76, 77].

Kürzlich wurde die Vermutung von Gross in [17] bewiesen. Wir formulieren dieses Ergebnis noch einmal.

Satz 4 *Es seien h and g ganze transzendente Funktionen. Dann hat die zusammengesetzte Funktion $h \circ g$ unendlich viele Fixpunkte.*

In diesem Kapitel soll ein neuer Beweis von Satz 4 gegeben werden. Obwohl einige der zugrunde liegenden Ideen ähnlich sind, ist dieser Beweis in wesentlichen Punkten verschieden von dem in [17] gegebenen Beweis. Insgesamt scheint mir der hier vorgestellte Beweis auch einfacher und kürzer als der Beweis in [17] zu sein. Auf der anderen Seite reicht die hier verwendete Methode jedoch nicht aus, um das in [17] erzielte Resultat zu beweisen, daß die Gleichung $h(g(z)) = p(z)$ unendlich viele Lösungen hat, falls h und g ganze transzendente Funktionen sind und falls p ein nicht konstantes Polynom ist.

Dafür kann mit den hier verwendeten Methoden Satz 4 jedoch in eine andere Richtung verallgemeinert werden.

Satz 5 *Es seien h and g ganze transzendente Funktionen. Dann hat die zusammengesetzte Funktion $h \circ g$ unendlich viele abstoßende Fixpunkte.*

Wie bereits bemerkt, gilt die Aussage von Satz 4 auch dann, wenn nur eine der beiden Funktionen h und g transzendent ist und wenn die andere ein nichtlineares Polynom ist. Beispiele wie $h(z) = \sqrt{z} \sin \sqrt{z}$ und $g(z) = z^2$ oder auch $h(z) = z^2$ und $g(z) = \sqrt{z} \sin \sqrt{z}$ zeigen, daß dies für Satz 5 nicht gilt. Wir haben jedoch folgendes Ergebnis.

Satz 6 *Es seien h and g ganze Funktionen. Eine der beiden Funktionen h und g sei transzendent und die andere sei ein Polynom, dessen Grad größer als 2 ist. Dann hat die zusammengesetzte Funktion $h \circ g$ unendlich viele abstoßende Fixpunkte.*

Wir bemerken noch, daß Gross seine Vermutung auch als Faktorisierungsproblem formuliert hat. Mit Gross [39] nennen wir eine meromorphe Funktion f *prim*, wenn in jeder Faktorisierung

$$f(z) = h(g(z)) \tag{2.1}$$

mit meromorphen Funktionen h und g entweder h oder g eine (gebrochen) lineare Transformation ist. Damit erhalten wir folgendes Ergebnis.

Folgerung 3 *Ist P ein Polynom und α eine nicht konstante ganze Funktion, dann ist die durch*

$$f(z) = P(z)e^{\alpha(z)} + z \tag{2.2}$$

definierte ganze Funktion f prim.

Tatsächlich folgt ja aus Satz 4 und den bereits zitierten Ergebnissen von Rosenbloom sowie Gross und Yang, daß die durch (2.2) definierte Funktion f keine Faktorisierung (2.1) mit nichtlinearen ganzen Faktoren h und g hat. Man nehme nun an, daß f eine Faktorisierung mit meromorphen Faktoren h und g habe, die nicht beide ganz sind. Da f ganz ist, muß f nach einem Ergebnis von Gross [38] dann periodisch sein. Es sei ω die Periode von f. Wegen (2.2) nimmt dann die Funktion $f(z) - z$ die Werte 0 und ω nur endlich oft an. Dies ist ein Widerspruch zum Satz von Picard und damit ist die durch (2.2) definierte Funktion f prim.

Faktorisierungen der durch (2.2) gegebenen Funktionen wurden von verschiedenen Autoren untersucht (man vgl. [36, 37, 57, 68, 74]). Die Vermutung, daß die durch (2.2) definierte Funktion f prim ist, wurde von Yang [74] auch für den Spezialfall, daß P konstant und α periodisch ist, ausgesprochen.

2.2 Beweis von Satz 4

Wir benutzen den folgenden, auf Gross and Yang [44, S. 214, Beweis von Theorem 2] zurückgehenden Hilfssatz.

Hilfssatz 9 *Es seien h and g ganze Funktionen. Dann hat $h \circ g$ genau dann unendlich viele Fixpunkte, wenn $g \circ h$ unendlich viele Fixpunkte hat.*

Wir wollen den Beweis hier nicht geben, verweisen jedoch auf den nächsten Abschnitt, wo ein ganz ähnliches Resultat (Hilfssatz 10) bewiesen wird.

Beweis von Satz 4. Wir nehmen an, daß $h \circ g$ nur endlich viele Fixpunkte hat. Wegen Hilfssatz 9 hat dann auch $g \circ h$ nur endlich viele Fixpunkte. Wie im Beweis von Satz 2 können wir nun aus Satz 3 ableiten, daß eine Jordankurve Γ existiert, die den Nullpunkt in ihrem Innern hat, die im Kreisring $s_\nu \leq |z| \leq t_\nu$ liegt und auf der

$$\log |h(g(z))| = (1 + o(1)) \log M(M(s_\nu, g), h)$$

gilt. Es folgt aus dem Satz von Rouché, daß die Anzahl der Fixpunkte von $h \circ g$ im Innern von Γ gleich der Anzahl der a-Stellen von $h \circ g$ im Innern von Γ ist, falls ν groß genug ist. Hierbei ist a eine fest gewählte, sonst aber beliebige komplexe Zahl. Eine geeignete Wahl von a zeigt, daß $h \circ g$ unendlich viele Fixpunkte hat, im Gegensatz zu unserer Annahme. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Bemerkung Wenn wir Satz 3 nur als Zwischenschritt zum Beweis von Satz 4 ansehen, so können wir in Satz 3 auf das Wort "abstoßend" verzichten. Das vereinfacht den Beweis. Anstelle von Hilfssatz 5 können wir nun eine Version des Satzes von Landau [46, S. 169] verwenden:

Ist $f(z)$ analytisch für $|z - z_0| < R$ und nimmt $f(z)$ dort die Werte 0 *und* 1 *nicht an, so gilt $|f'(z_0)|R \leq 2|f(z_0)|(|\log|f(z_0)|| + K)$ mit einer absoluten Konstanten K.*

Um die Version von Satz 3, in der das Wort "abstoßend" fehlt, zu beweisen, gehen wir wie im Beweis von Satz 3 vor. Wir definieren w_0 und u_0 wie dort, aber wir setzen

$$f(z) = \frac{h(g(z)) - z}{ze^{\tau_1(z)} - z}.$$

Wir finden dann wiederum, daß (1.8), (1.9) und (1.10) gelten. Daher gilt auch (1.11), und wir folgern, daß f einen der Werte 0 und 1 in der Kreisscheibe $D(z_0, Cr/\nu(r, g))$ annimmt, wenn die Konstante C geeignet gewählt ist und wenn $r \notin F$ genügend groß ist. Aus Hilfssatz 3 können wir jetzt ableiten, daß $h \circ g$ für $C' > C + 2\pi$ einen Fixpunkt z' in $D(z_0, C'r/\nu(r, g))$ hat, falls wieder $r \notin F$ groß genug ist. Genau wie vorher sieht man ein, daß z' der Ungleichung (1.12) genügt. Damit ist die abgeschwächte Version von Satz 3 bewiesen.

Wir bemerken noch, daß diese schwächere Fassung von Satz 3 auch zum Beweis der in §1.5 zitierten Vermutung von Baker ausreicht. Zum Beweis von Satz 2 wie auch zum Beweis von Satz 5 wird Satz 3 jedoch in der in §1.9 formulierten Fassung benötigt.

2.3 Beweis von Satz 5

Zunächst benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz 10 *Es seien h and g ganze Funktionen. Dann hat $h \circ g$ genau dann* *unendlich viele abstoßende Fixpunkte, wenn $g \circ h$ unendlich viele abstoßende Fixpunkte hat.*

Hilfssatz 10 ist sehr ähnlich zu Hilfssatz 9, der - wie bereits im vorigen Abschnitt bemerkt - auf Gross und Yang [44, S. 214, Beweis von Theorem 2] zurückgeht. Der Beweis von Hilfssatz 10 benutzt die auch von Gross und Yang verwendete Idee.

Beweis von Hilfssatz 10. Man nehme an, daß die Funktion $h \circ g$ unendlich Fixpunkte $z_0, z_1, z_2, \ldots$ habe und definiere $w_k = g(z_k)$ für alle k. Dann gilt $(g \circ h)(w_k) = g(h(g(z_k))) = g(z_k) = w_k$ für alle k. Darüberhinaus gilt $z_j = h(g(z_j)) = h(w_j) = h(w_k) = h(g(z_k)) = z_k$ falls $w_j = w_k$. Es folgt, daß $g \circ h$ unendlich viele Fixpunkte $w_0, w_1, w_2, \ldots$ hat. Wegen $(g \circ h)'(w_k) = g'(z_k)h'(w_k) = (h \circ g)'(z_k)$ und weil z_k ein abstoßender Fixpunkt von $h \circ g$ ist, folgt, daß w_k für alle k ein abstoßender Fixpunkt von $g \circ h$ ist. Damit ist Hilfssatz 10 bewiesen.

Beweis von Satz 5. Man nehme an, daß $h \circ g$ nur endlich viele abstoßende Fixpunkte habe. Wegen Hilfssatz 10 hat dann auch $g \circ h$ nur endlich viele abstoßende Fixpunkte. Wie im Beweis von Satz 2 können wir jetzt aus Satz 3 folgern, daß eine Jordankurve Γ_0 existiert, die den Nullpunkt in ihrem Innern hat, die im Kreisring $r_\nu \leq |z| \leq (r_\nu)^{1+\varepsilon}$ liegt und auf der

$$|h(g(z))| = M(r_\nu, h \circ g) \tag{2.3}$$

gilt. Wir definieren $G_0 = \operatorname{int}(\Gamma_0)$, $G_1 = g(G_0)$, $\Gamma_1 = \partial G_1$ und $G_2 = h(G_1)$. Dann ist G_2 die Kreisscheibe um den Nullpunkt vom Radius $M(r_\nu, h \circ g)$. Wie im Beweis von Satz 2 finden wir, daß positive, ganze, von ν abhängige Zahlen p_1 und p_2 existieren, die die folgenden Eigenschaften haben:

(i) Für jedes $a \in G_1$ hat die Gleichung $g(z) = a$ genau p_1 Lösungen in G_0 und g' hat genau $p_1 - 1$ Nullstellen in G_0, gezählt entsprechend der Vielfachheit.

(ii) Für jedes $b \in G_2$ hat die Gleichung $h(z) = b$ genau p_2 Lösungen in G_1 und h' hat genau $p_2 - 1$ Nullstellen in G_1, gezählt entsprechend der Vielfachheit.

(iii) $h \circ g$ hat genau $p_1 p_2$ Fixpunkte in G_0, gezählt entsprechend der Vielfachheit als Nullstellen von $h(g(z)) - z$.

(iv) $p_1 \to \infty$ und $p_2 \to \infty$ für $\nu \to \infty$.

Wir definieren $P = p_1 p_2$, das heißt, P ist die Anzahl der Fixpunkte von $h \circ g$ in G_0, gezählt entsprechend der Vielfachheit. Mit $\overline{P}$ bezeichnen wir die Anzahl der verschiedenen Fixpunkte von $h \circ g$ in G_0, das heißt, die Vielfachheiten werden hier nicht mitgezählt.

Es sei z_0 ein Fixpunkt von $h \circ g$, der einen Beitrag zur Differenz $P - \overline{P}$ liefert, das heißt, wir nehmen an, daß z_0 die Vielfachheit $m+1$ mit einer positiven ganzen Zahl m habe. Wie im Beweis von Satz 2 können wir aus Hilfssatz 6 und (2.3) ableiten, daß es mindestens m Nullstellen $z_1, z_2, \ldots, z_m$ von $(h \circ g)'$ in G_0 gibt, die unter Iteration von $h \circ g$ gegen z_0 streben. Darüberhinaus können $z_1, z_2, \ldots, z_m$ so gewählt werden, daß $h(g(z_i)) \neq h(g(z_j))$ für $i \neq j$ gilt. Letztere Behauptung folgt aus der Überlegung, daß wir annehmen dürfen, daß jedes der zu z_0 gehörenden Leaugebiete genau ein z_j enthält.

Wir sagen, daß zwei in G_0 enthaltene Nullstellen z_1 und z_2 von $(h \circ g)'$ äquivalent sind, wenn $h(g(z_1)) = h(g(z_2))$ gilt. Mit N bezeichnen wir die Anzahl der Äquivalenzklassen. Die obige Überlegung kann dann in der Form $P - \overline{P} \leq N$ geschrieben werden.

Wir bezeichnen nun mit $\overline{P}_{\text{anz}}$, $\overline{P}_{\text{rat}}$, $\overline{P}_{\text{irr}}$ und $\overline{P}_{\text{abs}}$ die Anzahl der anziehenden, rational indifferenten, irrational indifferenten bzw. abstoßenden Fixpunkte von $h \circ g$ in G_0. Wie im Beweis von Satz 2 können wir jetzt zeigen, daß $\overline{P}_{\text{anz}} + \overline{P}_{\text{rat}} \leq N$ gilt. Indem wir $h \circ g$ etwas stören, können wir wieder zeigen, daß sogar $\overline{P}_{\text{anz}} + \overline{P}_{\text{rat}} + \overline{P}_{\text{irr}} \leq N$ gilt. Insgesamt finden wir dann

$$\overline{P}_{\text{abs}} = P - (\overline{P}_{\text{anz}} + \overline{P}_{\text{rat}} + \overline{P}_{\text{irr}}) - (P - \overline{P}) \geq P - 2N.$$

Andererseits gilt $N \leq (p_1 - 1) + (p_2 - 1) = p_1 + p_2 - 2$, da g' genau $p_1 - 1$ Nullstellen in G_0 hat und da h' genau $p_2 - 1$ Nullstellen in G_1 hat. Wegen $P = p_1 p_2$ folgt $\overline{P}_{\text{abs}} \geq p_1 p_2 - 2p_1 - 2p_2 + 4$. Daher gilt $\overline{P}_{\text{abs}} \to \infty$ für $\nu \to \infty$. Dies ist ein Widerspruch zu unserer Annahme, daß $h \circ g$ nur endlich viele abstoßende Fixpunkte hat. Damit ist Satz 5 bewiesen.

2.4 Beweis von Satz 6

Wir benötigen das folgende Resultat von Pommerenke [60, Theorem 4].

Hilfssatz 11 *Es sei h ganz transzendent und $E = \{z : |h(z)| \leq 1\}$. Dann* *gilt*

$$\limsup_{\substack{z\in E\\|z|\to\infty}} \frac{|zh'(z)|}{\log M(|z|,h)} \geq K$$

mit einer positiven, absoluten Konstanten K.

Beweis von Satz 6. Wegen Hilfssatz 10 dürfen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß h ganz transzendent und daß g ein Polynom ist. Wir bezeichen den Grad von g mit d. Dann gilt nach Voraussetzung $d \geq 3$.

Nach Hilfssatz 11 existieren beliebig große Werte w_0, für die $|h(w_0)| \leq 1$ und

$$|h'(w_0)| \geq \frac{K \log M(|w_0|,h)}{2|w_0|}$$

gilt. Man wähle nun z_0, so daß $g(z_0) = w_0$ gilt, und definiere

$$f(z) = \frac{h(g(z))}{z_0}.$$

Weiter setze man $\mu = \max\{1, |f(z_0|\}$. Für ein gegebenes, positives A gilt dann

$$\begin{aligned}
\frac{2\mu(\log\mu + A)}{|f'(z_0)|} &= \frac{2A}{|h'(w_0)g'(z_0)|}\\
&= (1+o(1))\frac{2A|z_0|}{|h'(w_0)w_0|d}\\
&\leq (1+o(1))\frac{4A|z_0|}{K\log M(|w_0|,h)}\\
&\leq \frac{|z_0|}{4},
\end{aligned}$$

falls $|z_0|$ genügend groß ist. Nach Hilfssatz 5 existiert dann für hinreichend großes $|z_0|$ ein Gebiet H, welches in $D(z_0, |z_0|/4)$ enthalten ist, und ein $j \in \{0,1,2\}$, so daß H durch f konform auf $D(\exp(2\pi ij/d), 1/2)$ abgebildet wird. Die Funktion $h \circ g$ bildet dann das Gebiet H konform auf die Kreisscheibe $D(z_0 \exp(2\pi ij/d), |z_0|/2)$ ab.

Nun existiert eine komplexe Zahl z_1, welche den Bedingungen $g(z_1) = g(z_0)$ und $z_1 \sim z_0 \exp(2\pi ij/d)$ für $|z_0| \to \infty$ genügt. Es sei $\sigma(z)$ der Zweig von $g_{-1}(g(z))$, für den $\sigma(z_1) = z_0$ gilt. (Dabei bezeichnet g_{-1} die Umkehrfunktion von g.) Für genügend großes $|z_0|$ kann $\sigma(z)$ in $D(z_1, |z_1|/2)$ als eindeutige analytische Funktion definiert werden und es gilt $\sigma(z) \sim z \exp(2\pi ij/d)$ und $g(\sigma(z)) = g(z)$. Weiter existiert ein Gebiet G, welches in $D(z_1, |z_1|/3)$ enthalten ist und durch σ konform auf H abgebildet wird. Wegen $h(g(\sigma(z))) = h(g(z))$ wird G durch $h \circ g$ dann auf $D(z_0 \exp(2\pi ij/d), |z_0|/2)$ abgebildet. Außerdem ist der Abschluß von G in $D(z_0 \exp(2\pi ij/d), |z_0|/2)$ enthalten. Mit dem bereits im Beweis von Satz 2 benutzten Argument von Baker folgt nun aus dem Satz von Rouché und dem Schwarzschen Lemma, daß $h \circ g$ einen abstoßenden Fixpunkt in G hat. Damit ist Satz 6 bewiesen.

2.5 Bemerkungen und offene Fragen

Einige der Fragen über Fixpunkte iterierter Funktionen, die in §1.13 angesprochen wurden, können analog auch für zusammengesetzte Funktionen gestellt werden. So kann man etwa nach unteren Schranken für die Anzahl der Fixpunkte von $h \circ g$ im Kreise $|z| \leq r$ fragen, falls h und g ganze transzendente Funktionen sind. Eine solche untere Schranke wird natürlich von h und g abhängen. Es scheint mir so zu sein, daß $N(r, 1/(h(g(z)) - z))$ und $T(r, h \circ g)$ in einem gewissen Sinne immer von der gleichen Größenordnung sind. In der Tat kenne ich kein Beispiel, für das der Nevanlinnadefekt $\delta(0, h(g(z)) - z)$ positiv ist. Genauso kann man natürlich auch nach unteren Schranken für die Anzahl der abstoßenden Fixpunkte beziehungsweise oberen Schranken für die Anzahl der anziehenden Fixpunkte von $h \circ g$ im Kreise $|z| \leq r$ fragen.

Desweiteren kann man auch Fixpunkte zusammengesetzter meromorpher Funktionen untersuchen. In [19] wurde gezeigt, daß $h \circ g$ unendlich viele Fixpunkte besitzt, falls h eine meromorphe Funktion mit mindestens zwei Polen ist und falls g ganz transzendent ist. Es scheint mir bemerkenswert, daß der Beweis dieses Resultats wesentlich einfacher und kürzer ist als die Beweise des entsprechenden Ergebnisses für ganz transzendentes h (vgl. [17] und Satz 4 dieser Arbeit). Entscheidendes Hilfsmittel ist der Satz von Picard, ansonsten ist die Beweismethode in [19] aber völlig elementar. Außerdem wurde in [19] gezeigt, daß $h \circ g$ unendlich viele Fixpunkte hat, wenn h und g meromorphe transzendente Funktionen sind, von denen mindestens eine mehr als zwei Pole hat. Hat die Funktion g Pole, so ist natürlich $h \circ g$ nicht mehr meromorph in $\mathbb{C}$, sondern besitzt dort wesentliche Singularitäten.

Ebenso hat auch die Iterierte einer transzendenten meromorphen Funktion im allgemeinen unendlich viele wesentliche Singularitäten. Dies dürfte auch einer der Gründe dafür sein, daß die Iteration meromorpher Funktionen bisher recht wenig behandelt und erst in jüngster Zeit untersucht wurde (man vgl. z. B. [13, 14, 27]). Überraschenderweise stellt sich jedoch heraus, daß die in dieser Arbeit untersuchten Fragestellungen für Funktionen mit mehreren Polen einfacher sind als für ganze Funktionen. Tatsächlich läßt sich mit den in [19] verwandten Methoden leicht zeigen, daß eine transzendente meromorphe Funktion f unendlich viele periodische Punkte der primitiven Periode n hat, falls $n \geq 2$ gilt und falls f_{n-1} mehr als zwei Pole hat. Dies gilt im übrigen auch dann, wenn f_{n-1} nur einen oder zwei Pole hat, wie sich mit einer Modifikation der in dieser Arbeit verwandten Methode zeigen läßt.

Anstelle der Fixpunkte von $h \circ g$, also der Lösungen von $h(g(z)) = z$, kann man allgemeiner auch die Lösungen von

$$h(g(z)) = p(z) \tag{2.4}$$

untersuchen. Wie bereits in §2.1 bemerkt, wurde in [17] gezeigt, daß die Gleichung (2.4) unendlich viele Lösungen hat, wenn h und g ganz transzendent sind und wenn p ein nicht konstantes Polynom ist. Es ist nicht bekannt, ob dies auch für meromorphes h richtig bleibt. (Für lineare Polynome p folgt dies natürlich aus den bereits zitierten Ergebnissen in [19]). Außerdem stellt sich wiederum die Frage, was man über die Anzahlfunktion der Lösungen von (2.4) sagen kann. Schließlich kann man fragen, für welche transzendenten Funktionen p die Gleichung (2.4) unendlich viele Lösungen hat. Ich vermute, daß das der Fall ist, wenn die Funktion p (in einem geeigneten Sinne) langsamer wächst als g. Eine Voraussetzung, die man hier stellen könnte, wäre etwa $T(r,p) = o(T(r,g))$.

Die in dieser Arbeit entwickelten Methoden scheinen mir jedoch zur Behandlung dieser Probleme nicht geeignet, auch wenn sich beispielsweise für Funktionen kleiner Ordnung sicherlich einige Teilergebnisse gewinnen lassen (man vgl. §1.13). Für eine umfassendere Untersuchung dieser Fragen sind aber wohl neue Ideen und Methoden erforderlich.

Literaturverzeichnis

[1] L. V. Ahlfors, Sur les domaines dans lesquels une fonction méromorphe prend des valeurs appartenant à une région donnée, *Acta Soc. Sci. Fennicae (Nova Series A)* 2 (1933), no. 2, 1-17.

[2] L. V. Ahlfors, Zur Theorie der Überlagerungsflächen, *Acta Math.* 65 (1935), 157-194.

[3] I. N. Baker, Zusammensetzungen ganzer Funktionen, *Math. Z.* 69 (1958), 121-163.

[4] I. N. Baker, Fixpoints and iterates of entire functions, *Math. Z.* 71 (1959), 146-153.

[5] I. N. Baker, Some entire functions with fixpoints of every order, *J. Australian Math. Soc.* 1 (1959/60), 203-209.

[6] I. N. Baker, The existence of fixpoints of entire functions, *Math. Z.* 73 (1960), 280-284.

[7] I. N. Baker, Fixpoints of polynomials and rational functions, *J. London Math. Soc.* 39 (1964), 615-622.

[8] I. N. Baker, Repulsive fixpoints of entire functions, *Math. Z.* 104 (1968), 252-256.

[9] I. N. Baker, An entire function which has wandering domains, *J. Australian Math. Soc. (Ser. A)* 22 (1976), 173-176.

[10] I. N. Baker, Wandering domains in the iteration of entire functions, *Proc. London Math. Soc.* (3) 49 (1984), 563-576.

[11] I. N. Baker, Some entire functions with multiply-connected wandering domains, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.* 5 (1985), 163-169.

[12] I. N. Baker, Iteration of entire functions: an introductory survey, in *Lectures on complex analysis*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1987, 1-17.

[13] I. N. Baker, J. Kotus und L. Yinian, Iterates of meromorphic functions I, Manuskript.

[14] I. N. Baker, J. Kotus und L. Yinian, Iterates of meromorphic functions II, *J. London Math. Soc.* (2) 42 (1990), 267-278.

[15] W. Bergweiler, On the fix-points of composite functions, *Pacific J. Math.* 143 (1990), 1-8.

[16] W. Bergweiler, Fix-points of meromorphic functions and iterated entire functions, *J. Math. Anal. Appl.* 151 (1990), 261-274.

[17] W. Bergweiler, Proof of a conjecture of Gross concerning fix-points, *Math. Z.* 204 (1990), 381-390.

[18] W. Bergweiler, On the number of fix-points of iterated entire functions, *Arch. Math.* 55 (1990), 558-563.

[19] W. Bergweiler, On the existence of fixpoints of composite meromorphic functions, erscheint in *Proc. Amer. Math. Soc.*

[20] P. Bhattacharyya, On the domain of normality of an attractive fixpoint, *Trans. Amer. Math. Soc.* 153 (1971), 89-98.

[21] P. Blanchard, Complex analytic dynamics on the Riemann sphere, *Bull. Amer. Math. Soc.* 11 (1984), 85-141.

[22] H. Brolin, Invariant sets under iteration of rational functions, *Ark. Mat.* 6 (1967), 103-141.

[23] R. B. Burckel, Iterating analytic self-maps of discs, *Amer. Math. Monthly* 88 (1981), 396-407.

[24] J. Clunie, The composition of entire and meromorphic functions, in *Mathematical essays dedicated to A. J. Macintyre*, Ohio University Press, Athens, Ohio, 1970, 75-92.

[25] H. Cremer, Über die Häufigkeit der Nichtzentren, *Math. Ann.* 115 (1938), 573-580.

[26] A. Denjoy, Sur l'itération des fonctions analytiques, *C. R. Acad. Sci. Paris* 182 (1926), 255-257.

[27] R. L. Devaney and L. Keen, Dynamics of meromorphic maps with polynomial Schwarzian derivative, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 22 (1989), 55-81.

[28] A. Douady und J. H. Hubbard, On the dynamics of polynomial-like mappings, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 18 (1985), 287-343.

[29] J. Dufresnoy, Sur les domaines couvertes par les valeurs d'une fonction méromorphe ou algébroïde, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3) 58 (1941), 179-259.

[30] A. E. Eremenko, On the iteration of entire functions, in *Dynamical systems and ergodic theory*, Banach Center Publications 23, Polish Scientific Publishers, Warschau 1989, 339-345.

[31] A. E. Eremenko und M. Yu. Lyubich, Examples of entire functions with pathological dynamics, *J. London Math. Soc.* (2) 36 (1987), 458-468.

[32] A. E. Eremenko und M. Yu. Lyubich, The dynamics of analytic transforms, *Leningrad Math. J.* 1 (1990), 563-634.

[33] L. Ehrenpreis, Problems, in *Entire functions and related parts of analysis*, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1968, 533-546.

[34] P. Fatou, Sur les équations fonctionelles, *Bull. Soc. Math. France* 47 (1919), 161-271; 48 (1920), 33-94, 208-314.

[35] P. Fatou, Sur l'itération des fonctions transcendantes entières, *Acta Math.* 47 (1926), 337-360.

[36] F. Gross, On factorization of meromorphic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 131 (1968), 215-222.

[37] F. Gross, Prime entire functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 161 (1971), 219-233.

[38] F. Gross, Factorization of entire functions which are periodic mod g, *Indian J. Pure Appl. Math.* 2 (1971), 561-571.

[39] F. Gross, *Factorization of meromorphic functions*, U. S. Government Printing Office, Washington, D. C., 1972.

[40] F. Gross, On factorization theory of meromorphic functions, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* 24 (1975), 47-60.

[41] F. Gross, Factorization of meromorphic functions and some open problems, in *Complex analysis*, Lect. Notes Math. 599, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1977, 51-67.

[42] F. Gross und C. F. Osgood, On fixed points of composite entire functions, *J. London Math. Soc.* (2) 28 (1983), 57-61.

[43] F. Gross und C. F. Osgood, On fixed points of composite meromorphic functions, *J. Math. Anal. Appl.* 114 (1986), 490-496.

[44] F. Gross und C. C. Yang, The fix-points and factorization of meromorphic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 168 (1972), 211-219.

[45] W. K. Hayman, Uniformly normal families, in *Lectures on functions of a complex variable*, Michigan University Press, Ann Arbor, Michigan, 1955, 199-212.

[46] W. K. Hayman, *Meromorphic functions*, Clarendon Press, Oxford 1964 (Neuauflage mit Anhang 1975).

[47] W. K. Hayman, *Research problems in function theory*, Athlone Press, London 1967.

[48] W. K. Hayman, The local growth of power series: a survey of the Wiman-Valiron method, *Can. Math. Bull.* (3) 17 (1974), 317-358.

[49] M. Heins, On the iteration of functions which are analytic and single-valued in a given multiply-connected region, *Amer. J. Math.* 58 (1941), 461-480.

[50] M. Heins, A theorem of Wolff-Denjoy type, in *Complex analysis. Articles dedicated to A. Pfluger on the occasion of his* 80^{th} *birthday*, Birkhäuser, Basel, Berlin, 1988, 81-86.

[51] M. Herman, Exemples de fractions rationelles ayant une orbite dense sur la sphere de Riemann, *Bull. Soc. Math. France* 112 (1984), 93-142.

[52] G. Jank und L. Volkmann, *Einführung in die Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differentialgleichungen*, Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart, 1985.

[53] G. Julia, Sur l'itération des fonctions rationelles, *J. Math. Pures Appl.* (7) 4 (1918), 47-245.

[54] B. O. Kjellberg, On the minimum modulus of entire functions of lower order less than one, *Math. Scand.* 8 (1960), 189-197.

[55] M. Yu. Lyubich, The dynamics of rational transforms: the topological picture, *Russian Math. Surveys* 41:4 (1986), 43-117, Übersetzung aus *Uspekhi Mat. Nauk* 41:4 (1986), 35-95.

[56] J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable: Introductory Lectures*, Stony Brook Institute for Mathematical Sciences, Preprint 1990/5.

[57] M. Ozawa, On certain criteria for the left-primeness of entire functions, *Kodai Math. Sem. Rep.* 26 (1975), 304-317.

[58] H.-O. Peitgen und P. H. Richter, *The beauty of fractals*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1986.

[59] G. A. Pfeifer, On the conformal mappings of curvilinear angles. The functional equation $\phi(f(x)) = a_1\phi(x)$, *Trans. Amer. Math. Soc.* 18 (1917), 185-198.

[60] Ch. Pommerenke, Normal functions, in *Proceedings of the NRL conference on classical function theory*, U. S. Government Printing Office, Washington, D. C., 1970, 77-93.

[61] P. C. Rosenbloom, L'itération des fonctions entières, *C. R. Acad. Sci. Paris* 227 (1948), 382-383.

[62] P. C. Rosenbloom, The fix-points of entire functions, *Medd. Lunds Univ. Sem., Suppl.-Bd. M. Riesz* (1952), 187-192.

[63] C. L. Siegel, Iteration of analytic functions, *Ann. Math.* 43 (1942), 607-612.

[64] M. Shishikura, On the quasi-conformal surgery of rational functions, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 20 (1987), 1-29.

[65] D. Sullivan, Itération des fonctions analytiques complexes, *C. R. Acad. Sci. Paris* 294 (1982), 301-303.

[66] D. Sullivan, Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I: Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains, *Ann. Math.* 122 (1985), 401-418.

[67] D. Sullivan, Quasiconformal homeomorphisms and dynamics III: Topological conjugacy classes of analytic endomorphisms, Manuskript, 1983.

[68] H. Urabe, Uniqueness of the factorization under composition of certain entire functions, *J. Math. Kyoto Univ.* 18 (1978), 95-120.

[69] G. Valiron, *Lectures on the general theory of integral functions*, Édouard Privat, Toulouse 1923.

[70] J. E. Whittington, On the fixpoints of entire functions, *Proc. London Math. Soc.* (3) 17 (1967), 530-546.

[71] J. Wolff, Sur l'itération des fonctions holomorphes dans une région, et dont les valeurs appartiennent à cette région, *C. R. Acad. Sci. Paris* 182 (1926), 42-43.

[72] J. Wolff, Sur l'itération des fonctions bornées, *C. R. Acad. Sci. Paris* 182 (1926), 200-201.

[73] J. Wolff, Sur une généralisation d'un théorème de Schwarz, *C. R. Acad. Sci. Paris* 182 (1926), 918-920.

[74] C. C. Yang, On the factorization of entire functions, *Ill. J. Math.* 21 (1977), 898-905.

[75] C. C. Yang, Progress in factorization theory, in *Factorization theory of meromorphic functions and related topics*, Marcel Dekker, New York, Basel, 1982, 171-192.

[76] C. C. Yang, Further results on the fix-points of composite transcendental functions, *J. Math. Anal. Appl.* 90 (1982), 259-269.

[77] C. C. Yang, On the fix-points of composite transcendental entire functions, *J. Math. Anal. Appl.* 108 (1985), 366-370.

[78] C. C. Yang, Some aspects of factorization theory - a survey, in *Lectures on complex analysis*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1987, 19-39, und *Complex Variables Theory Appl.* 13 (1989), 133-142.

[79] J.-C. Yoccoz, Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de (C,0), *C. R. Acad. Sci. Paris* 306 (1988), 55-58.

Lebenslauf

Name:	Walter Bergweiler
Familienstand:	verheiratet
Privatanschrift:	Krugenofen 37a, 5100 Aachen
Dienstanschrift:	Lehrstuhl II für Mathematik, RWTH Aachen, Templergraben 55, 5100 Aachen
19. Januar 1958	geboren in Stachelau (jetzt Olpe) als Sohn von Peter Bergweiler und Änne Bergweiler geb. Bekker
1964 - 1967	Besuch der Volksschule Stachelau
1967 - 1976	Besuch des Städtisches Gymnasiums Olpe
18. Juni 1976	Abitur
1976 - 1983	Studium der Mathematik (Nebenfach Mechanik) an der RWTH Aachen
7. Juli 1983	Diplom in Mathematik
Okt. 1983 - Jan. 1985	Zivildienst beim Kuratorium für Heimdialyse und beim Deutschen Roten Kreuz
April 1985 - Dez. 1985	Wissenschaftliche Hilfskraft am Lehrstuhl II für Mathematik der RWTH Aachen
Jan. 1986 - Sept. 1989	Wissenschaftlicher Angestellter ebenda
16. Mai 1986	Promotion zum Doktor der Naturwissenschaften
Aug. 1987 -Aug. 1989	Visiting Assistant Professor an der Cornell University, Ithaca, New York, im Rahmen eines Feodor-Lynen-Forschungsstipendiums der Alexander-von-Humboldt Stiftung
seit Oktober 1989	Wissenschaflicher Assistent am Lehrstuhl II für Mathematik der RWTH Aachen
8. Mai 1991	Habilitation