

Über semihyperbolische Abbildungen, John-Gebiete und lokalen Zusammenhang der Juliamenge

Diplomarbeit am Mathematischen Seminar der Christian-Albrechts-Universität
betreuender Professor: Prof. Dr. Walter Bergweiler
vorgelegt von: Markus Baumgartner

Kiel,
Juli 2011

Ich widme diese Arbeit meiner Mutter Annegret Baumgartner (†2004).

Über semihyperbolische Abbildungen, John-Gebiete und lokalen Zusammenhang der Juliamenge

Diplomarbeit am Mathematischen Seminar der Christian-Albrechts-Universität
betreuender Professor: Prof. Dr. Walter Bergweiler
vorgelegt von: Markus Baumgartner

Kiel,
Juli 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	9
2.1	Grundlegende Definitionen und die sphärische Metrik	10
2.2	Grundlagen aus der Funktionentheorie	13
2.3	Eigentliche Abbildungen und Blaschke-Produkte	15
2.4	Fatou- und Juliamengen	16
2.5	Nichtuniforme Hyperbolizität	20
2.6	Die quasi-hyperbolische Länge und die hyperbolische Metrik	22
2.7	Modul und Ringgebiet	23
2.8	Quasischeiben, John-, Hölder- und integrierbare Gebiete	28
2.9	Lokaler Zusammenhang	32
3	Wichtige Hilfsmittel	35
3.1	Hilfsmittel aus der Funktionentheorie	36
3.2	Lemmata für die quasi-hyperbolische Länge und die hyperbolische Metrik .	39
3.3	Kontrolle des Moduls	41
3.4	Eigenschaften von nichtuniform hyperbolischen Abbildungen	45
3.5	Charakterisierungen von John-Gebieten	49
3.6	Kriterium für den lokalen Zusammenhang	57
4	Die Hauptergebnisse	61
4.1	Semihyperbolizität	62
4.2	John-Regularität der Fatoukomponenten	66
4.3	Lokaler Zusammenhang der Juliamenge	79
	Literaturverzeichnis	83

Zusammenfassung

In Anlehnung an eine Arbeit von Mihalache zeigen wir, dass rationale, semihyperbolische Abbildungen verschiedene äquivalente Eigenschaften besitzen, dass Fatoukomponenten von rationalen, semihyperbolischen Abbildungen John-Gebiete sind und dass die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt. Dies verallgemeinert ein bekanntes Resultat von Carleson, Jones und Yoccoz für Polynome. Für den Fall einer zusammenhängenden Juliamenge zeigen wir, dass die Fatoukomponenten sogar gleichmäßige John-Gebiete sind.

Außerdem zeigen wir, dass eine zusammenhängende Juliamenge für eine große Klasse von nichtuniform hyperbolischen Abbildungen lokal zusammenhängend ist. Diese Klasse umfasst unter anderen subhyperbolisch, semihyperbolisch, Collet-Eckmann und Topological Collet-Eckmann. Im Fall einer semihyperbolischen Abbildung beweisen wir darüber hinaus ein noch stärkeres Resultat.

Kapitel 1

Einleitung

Die Untersuchung des Iterationsverhaltens rationaler Funktionen hat ihren Ursprung in den Arbeiten von Gaston Julia [19] und Pierre Fatou [11] zu Beginn des 20. Jahrhunderts. Fatou und Julia zerlegten unabhängig voneinander die komplexe Ebene \mathbb{C} beziehungsweise die Riemannsche Sphäre $\overline{\mathbb{C}}$ in zwei disjunkte Mengen, die später nach ihnen als die Fatou- und Juliamenge benannt wurden. Für eine ganze oder rationale Funktion f ist die *Fatoumenge* \mathcal{F} die Menge aller Punkte, in denen die Folge der Iterierten von f eine normale Familie bildet, und die *Juliamenge* \mathcal{J} ist ihr Komplement. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli ist daher das Iterationsverhalten der Punkte aus der Fatoumenge in gewisser Weise stabil. Das Iterationsverhalten der Punkte aus der Juliamenge ist hingegen instabil. Unter Instabilität verstehen wir dabei, dass schon für zwei Punkte innerhalb einer kleinen Umgebung um einen Punkt aus der Juliamenge das Iterationsverhalten stark differieren kann.

Für eine rationale Funktion f nennen wir $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ *periodisch*, falls es ein $p \in \mathbb{N}$ mit $f^p(z_0) = z_0$ gibt, und *präperiodisch*, falls es ein $p \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $f^p(z_0)$ periodisch ist. Dabei bezeichnet $f^p := f \circ \dots \circ f$ die p -te Iterierte der Funktion f . Ist $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ periodisch, so bezeichnen wir $(f^p)'(z_0)$ mit λ und nennen λ den *Multiplikator* von z_0 , falls $z_0 \neq \infty$. Ist $z_0 = \infty$, so setzen wir $\lambda := \frac{d}{dz}(\frac{1}{f^n(\frac{1}{z})})|_0$. Ist $|\lambda| < 1$, so nennen wir z_0 einen *attraktiven periodischen Punkt*. Man kann leicht zeigen, dass dann eine Umgebung um z_0 existiert, in der die Iterierten von f^p gegen z_0 konvergieren. Ist ein periodischer Punkt z_0 attraktiv, so bezeichnen wir mit $A(z_0) := \{z \in \overline{\mathbb{C}} : f^{pn}(z) \rightarrow z_0, \text{ für } n \rightarrow \infty\}$ den *Einzugsbereich* von z_0 und mit $A^*(z_0)$ die Komponente von $A(z_0)$, die z_0 enthält. $A^*(z_0)$ ist eine Komponente der Fatoumenge und wird auch *Attraktionsgebiet* genannt. Eine Komponente U der Fatoumenge heißt *periodisch*, wenn ein $p \in \mathbb{N}$ mit $f^p(U) \subseteq U$ existiert, und *präperiodisch*, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $f^n(U)$ periodisch ist. Mit Hilfe von Multiplikatoren von periodischen Punkten kann man die periodischen Komponenten der Fatoumenge in *Attraktionsgebiete*, *parabolische Gebiete* und *Rotationsgebiete* unterteilen, außerdem kann man zeigen, dass

alle nicht periodischen Komponenten bereits präperiodisch sind (für mehr Hintergrund zur Iterationstheorie siehe Kapitel 2.4).

Im Folgenden sei $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ immer eine rationale Abbildung, deren Grad mindestens zwei beträgt, wenn nichts anderes erwähnt wird. Wir werden alle Definitionen für rationale Funktionen angeben, auch wenn häufig allgemeinere Formulierungen möglich sind.

Mit $\delta(\cdot, \cdot)$ bezeichnen wir den Abstand bezüglich der sphärischen Metrik σ . Wir verwenden für $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ und $r > 0$ die Notation $B_s(z_0, r) := \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \delta(z, z_0) < r\}$ für die sphärische Kreisscheibe um z_0 mit Radius r sowie $\text{diam}_s(\cdot)$ für den sphärischen Durchmesser.

Eine rationale Abbildung f heißt *hyperbolisch*, falls alle kritischen Punkte von f in Einzugsbereichen von attraktiven periodischen Punkten liegen. Man kann zeigen, dass dies äquivalent dazu ist, dass die Juliamenge von f keinen Punkt der postkritischen Menge $P(f) := \overline{\{f^n(c) : c \in \text{Crit}_f, n \in \mathbb{N}_0\}}$ enthält, wobei Crit_f die Menge der kritischen Punkte von f bezeichnet, und dazu, dass, wenn ∞ in der Fatoumenge liegt, ein $c > 0$ und $K > 1$ existieren, sodass $|(f^n)'(z)| \geq cK^n$ für alle $z \in \mathcal{J}$ und $n \geq 1$ gilt.

Hyperbolische Abbildungen sind vergleichsweise gut verstanden und haben viele schöne Eigenschaften (siehe [7], [28]). Erlaubt man jedoch kritische Punkte in der Juliamenge, so verliert man diese Eigenschaften sehr leicht. Douady und Hubbard haben 1984/85 zum ersten Mal eine abgeschwächte Form der Hyperbolizität eingeführt, die sogenannte Subhyperbolizität ([7], [10]). Eine rationale Funktion heißt *subhyperbolisch*, wenn alle kritischen Punkte in der Juliamenge präperiodisch sind und wenn alle kritischen Punkte in der Fatoumenge in Einzugsbereichen von attraktiven periodischen Punkten liegen. Insbesondere enthält die Juliamenge einer subhyperbolischen Funktion nur endlich viele Punkte aus der postkritischen Menge.

Weitere Typen nichtuniformer Hyperbolizität sind: Collet-Eckmann ([16]), Topological Collet-Eckmann ([27]), Recurrent Collet-Eckmann ([23]), Uniform hyperbolicity on periodic orbits ([23], [27]), semihyperbolisch ([8],[22]) und ExpShrink ([22],[23]). In dieser Arbeit wollen wir uns mit Abbildungen der beiden letztgenannten Arten genauer befassen. Unsere Resultate basieren hauptsächlich auf den von Carleson, Jones und Yoccoz in ihrer Arbeit *Julia and John* ([8]) genannten Ergebnissen sowie den Resultaten, die Mihalache in seiner Arbeit *Julia and John revisited* ([22]) vorstellt.

Es seien $U, V \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ Gebiete und $f : U \rightarrow V$ eine rationale Funktion. Ferner sei $k \in \mathbb{N}$. Dann heißt k *Abbildungsgrad* von f oder $\text{deg}(f)$, wenn zu jedem $y \in V$ genau k Urbilder in U gezählt gemäß Vielfachheit existieren.

Sei f eine rationale Funktion und $z \in \mathcal{J}$. Dann heißt f *semihyperbolisch in z* , wenn ein $r > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ existieren, sodass für alle $n > 0$ sowie für alle Komponenten U

von $f^{-n}(B_s(z, r))$ Folgendes gilt: $\deg(f^n|_U) \leq N$. Ist f semihyperbolisch in allen Punkten aus der Juliamenge, so nennen wir f *semihyperbolisch*. Da die Juliamenge kompakt ist, existieren ein gemeinsames N und ein gemeinsames r für alle Punkte aus der Juliamenge. Eine rationale Abbildung f erfüllt die *Exponential-Shrinking-of-components-Bedingung*, kurz *ExpShrink*, wenn $\lambda > 1$ und $r > 0$ existieren, sodass für alle $z \in \mathcal{J}$ und $n > 0$ alle Komponenten W von $f^{-n}(B_s(z, r))$ Folgendes erfüllen: $\text{diam}_s W < \lambda^{-n}$.

Die ExpShrink-Bedingung ist äquivalent zu einer Vielzahl anderer Formen nichtuniformer Hyperbolizität, dazu gehören zum Beispiel Topological Collet-Eckmann (TCE) und Uniform hyperbolicity on periodic orbits (UHP) (siehe [27]).

Ein Punkt x heißt *nichtrekurrent*, wenn $x \notin \omega(x)$, wobei $\omega(x) = \bigcap_{N \geq 0} \overline{\{f^n(x) : n \geq N\}}$ die Häufungspunktmenge des Orbits von x ist. Mit NR bezeichnen wir die Menge der nichtrekurrenten Punkte.

Eine rationale Abbildung f erfüllt die *Misiurewicz-Bedingung*, wenn f keine parabolischen Gebiete hat und alle kritischen Punkte in der Juliamenge nichtrekurrent sind.

In Theorem 1 zeigen wir zwei äquivalente Eigenschaften für semihyperbolische Abbildungen. Der Satz geht auf ein Resultat aus der Arbeit von Carleson, Jones und Yoccoz ([8]) zurück, welches die Aussage für Polynome zeigt. Der Beweis aus [8] stützt sich auf ein Resultat aus einer Arbeit von Mañé ([21]). Für unseren Beweis werden wir einer Beweisidee von Bergweiler und Morosawa ([6]) folgen und Beweismethoden von Mihalache ([23]) benutzen.

Theorem 1 (Semihyperbolischer Äquivalenzsatz) *Sei f eine rationale Funktion. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

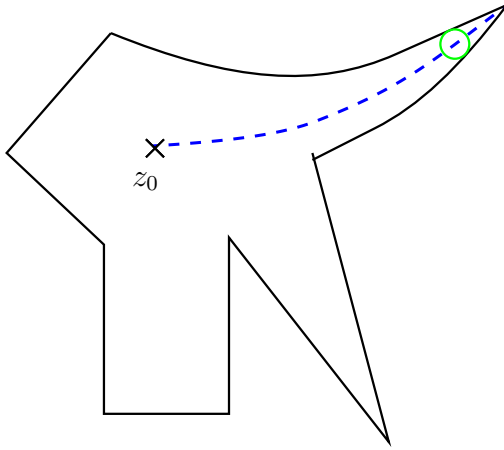
- (i) f ist semihyperbolisch.
- (ii) f ist semihyperbolisch und erfüllt die ExpShrink-Bedingung.
- (iii) f erfüllt die Misiurewicz-Bedingung.

Wir werden Theorem 1 nicht vollständig beweisen. Beim Beweis der Richtung (i) \Rightarrow (ii) machen wir eine Zusatzvoraussetzung, die aber zum Beispiel bei Polynomen immer erfüllt ist. Für den allgemeinen Fall verweisen wir auf Mihalache ([23, Proposition 11]). Auch beim Beweis von (iii) \Rightarrow (i) stützen wir uns auf ein Resultat von Mihalache ([23]).

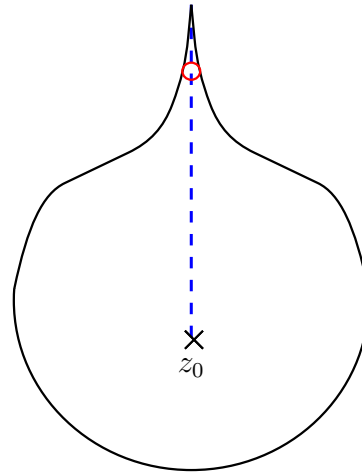
Man kann relativ leicht zeigen, dass alle subhyperbolischen Abbildungen die Misiurewicz-Bedingung erfüllen. Damit sind alle subhyperbolischen Abbildungen bereits semihyperbolisch, siehe dazu Korollar 4.1.2.

Ein weiteres zentrales Thema dieser Arbeit sind die sogenannten John-Gebiete. Diese wurden zum ersten Mal 1961 von John ([18]) eingeführt. Ein Gebiet $\Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ist ein ε -John-

Gebiet, wenn es ein $z_0 \in \Omega$ gibt, sodass für alle $z_1 \in \Omega$ ein Weg $\gamma_{z_1} \subseteq \Omega$ existiert, der z_1 mit z_0 verbindet, und für alle $z \in \gamma_{z_1}$ Folgendes gilt: $\delta(z, \partial\Omega) \geq \varepsilon \delta(z, z_1)$.



John-Gebiet

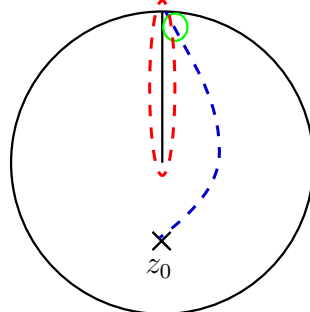


kein John-Gebiet

z_0 wird auch als *John-Zentrum*, ε auch als *John-Konstante* und einfach zusammenhängende John-Gebiete werden auch als *John-Scheiben* bezeichnet. Vereinfacht gesagt, ist ein Gebiet ein John-Gebiet, wenn man zwei Punkte des Gebiets durch einen Weg verbinden kann, ohne zu nah an den Rand zu kommen (vgl. [17], [25], [26]).

Sei γ eine Jordankurve und $D > 1$. Dann heißt γ *D-Quasikreis*, wenn für alle $x, y \in \gamma$ die Teilkurve γ' von γ , die x mit y verbindet und den kleineren Durchmesser besitzt, $\text{diam}_s \gamma' \leq D \text{dist}_s(x, y)$ erfüllt. Ein einfach zusammenhängendes Gebiet, dessen Rand ein *D-Quasikreis* ist, heißt *D-Quasischeibe* (vgl. [12]).

Quasischeiben und John-Gebiete sind eng miteinander verbunden: Beide Komplemente einer Jordankurve sind genau dann John-Gebiete, wenn die Jordankurve ein Quasikreis ist. Daher sind Quasischeiben immer John-Scheiben, die Umkehrung gilt im Allgemeinen jedoch nicht. Zum Beispiel ist eine Kreisscheibe mit einem radialen Einschnitt zwar eine John-Scheibe, aber keine Quasischeibe.



John-Scheibe, aber keine Quasischeibe

Es ist daher hilfreich, sich John-Scheiben als „einseitige“ Quasischeiben vorzustellen.

Ein auf Sullivan zurückgehender Beweis zeigt, dass, wenn eine hyperbolische Abbildung f genau zwei Fatoukomponenten besitzt, die Juliamenge ein Quasikreis ist. Somit sind beide Fatoukomponenten Quasischeiben (siehe [7, Theorem 2.1]).

Ein weiterer Begriff, der in diesem Zusammenhang zu nennen ist, ist das sogenannte Hölder-Gebiet (siehe 2.8). Jedes John-Gebiet ist bereits ein Hölder-Gebiet (siehe Bemerkung 2.8.18). Zudem sind im Fall einer ExpShrink-Abbildung alle Fatoukomponenten Hölder-Gebiete (siehe Satz 2.8.16).

Wie Carleson, Jones und Yoccoz in ihrer Arbeit gezeigt haben, ist für Polynome die Eigenschaft, dass f semihyperbolisch ist, äquivalent dazu, dass alle Fatoukomponenten John-Gebiete sind. In Theorem 2 zeigen wir, dass alle Fatoukomponenten von rationalen semihyperbolischen Abbildungen John-Gebiete sind. Der Beweis basiert auf dem von Mihalache ([22]).

Theorem 2 *Fatoukomponenten einer rationalen, semihyperbolischen Abbildung sind John-Gebiete.*

In Satz 4.2.4 zeigen wir, dass die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt. Damit lässt sich also die Äquivalenz, die nach Carleson, Jones und Yoccoz für Polynome gilt, nicht auf rationale Funktionen übertragen.

In Korollar 4.2.5 zeigen wir darüber hinaus, dass, falls die Juliamenge einer rationalen, semihyperbolischen Abbildung zusammenhängend ist, ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass alle Fatoukomponenten ε -John-Gebiete sind.

Dass alle einfach zusammenhängenden Fatoukomponenten John-Gebiete sind, war im Falle einer subhyperbolischen Abbildung bereits bekannt (siehe [7, Kapitel VII, Theorem 3.1]).

Eine abgeschlossene Menge $A \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ heißt *lokal zusammenhängend*, wenn für alle $\tau > 0$ ein $\theta > 0$ existiert, sodass für alle Punkte $a, b \in A$ mit $\delta(a, b) < \theta$ ein Kontinuum (das heißt eine kompakte, zusammenhängende Menge mit mehr als einem Punkt) $B \subseteq A$ gefunden werden kann mit $a, b \in B$ und $\text{diam}_s B < \tau$.

In Theorem 3 zeigen wir im Falle einer zusammenhängenden Juliamenge, dass für rationale, semihyperbolische Abbildungen die Juliamenge nicht nur lokal zusammenhängend ist. Mit Hilfe von Korollar 4.2.5 weisen wir nach, dass die Parameter aus der Definition von lokal zusammenhängend sich nur linear um die gleichmäßige John-Konstante der Fatoukomponenten unterscheiden.

Theorem 3 *Ist die Juliamenge einer rationalen, semihyperbolischen Abbildung zusammenhängend, dann ist sie lokal zusammenhängend. Darüber hinaus existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass die Juliamenge die Definition des lokalen Zusammenhangs mit $\theta = \varepsilon\tau$ erfüllt.*

In Satz 4.3.2 zeigen wir, dass die Abbildung nicht notwendig semihyperbolisch sein muss, damit die Juliamenge lokal zusammenhängend ist. Es genügt bereits, wenn die Abbildung eine schwächere Version von ExpShrink erfüllt, die sogenannte SumShrink-Bedingung. Beim Beweis dieser Aussage stützen wir uns auf Resultate von Graczyk und Smirnov ([15]). Eine rationale Abbildung f erfüllt die *Summable-Shrinking-of-components-Bedingung*, kurz *SumShrink*, wenn $r > 0$ und eine Folge positiver Zahlen $(\omega_n)_{n \geq 1}$ existieren, sodass $\sum_{n > 0} \omega_n < \infty$ gilt und für alle $z \in \mathcal{J}$, $n > 0$ und alle Komponenten W von $f^{-n}(B_s(z, r))$ Folgendes gilt: $\text{diam}_s W < \omega_n$.

Die SumShrink-Bedingung schließt Rotations- und parabolische Gebiete aus. Damit ist nach der Klassifikation der Fatoukomponenten (Satz 2.4.11) die Juliamenge einer Abbildung ohne Attraktionsgebiete bereits die ganze Riemannsche Sphäre.

Dass die erste Aussage von Theorem 3 für hyperbolische beziehungsweise subhyperbolische Abbildungen gilt, war bereits bekannt (siehe [24, Theorem 19.2] und [24, Theorem 19.7]). Ist f ein Polynom und ist die Juliamenge zusammenhängend, so ist der lokale Zusammenhang der Juliamenge einfacher einzusehen. In diesem Fall ist $A^*(\infty)$ einfach zusammenhängend. Ist zudem $A^*(\infty)$ ein John-Gebiet oder sogar nur ein Hölder-Gebiet, so lässt sich die Riemannabbildung (hölder-)stetig auf den Rand fortsetzen (siehe Lemma 2.8.15). Aus dem Satz von Carathéodory (Satz 2.9.2) folgt damit, dass $\partial A^*(\infty) = \mathcal{J}$ lokal zusammenhängend ist.

Ist die Juliamenge zusammenhängend und sind alle Fatoukomponenten John-Gebiete und somit alle Ränder lokal zusammenhängend, so bedeutet dies nicht zwingend, dass die Juliamenge lokal zusammenhängend ist, da es im Allgemeinen unendlich viele Fatoukomponenten gibt.

Um die in dieser Arbeit diskutierten Ergebnisse besser einordnen zu können, geben wir hier eine Übersicht über bereits bekannte Resultate, in die wir die Ergebnisse dieser Arbeit (grün markiert) einbinden.

$P(f) \cap \mathcal{J} = \emptyset$	$ P(f) \cap \mathcal{J} < \infty$	$\text{Crit}_f \cap \mathcal{J} \subseteq \text{NR}$	TCE, UHP, ...
\Downarrow	\Uparrow	\Uparrow	\Downarrow
f ist hyp.	\Rightarrow	f ist subhyp.	\Rightarrow
\Downarrow	\Downarrow	\Downarrow ($\Uparrow f$ Poly.)	\Downarrow
\mathcal{F} 2 Komp. \Rightarrow \mathcal{J} Quasikreis	\Rightarrow	\mathcal{F} ε -John + \mathcal{J} zshgd. \Rightarrow \mathcal{J} lokal zshgd. ($\theta = \varepsilon\tau$)	\Rightarrow
	\Rightarrow		\mathcal{F} Hölder + \mathcal{J} zshgd. \Rightarrow \mathcal{J} lokal zshgd.

Im zweiten Kapitel werden wir zunächst an einige Grundlagen aus der Funktionen- und Iterationstheorie erinnern, die wir für unsere Beweise benötigen werden. Außerdem werden wir hier einen allgemeinen Hintergrund vermitteln und alle Begriffe einführen, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit nötig sein werden. In Kapitel 3 werden wir dann einige Lemmata und Sätze beweisen, auf die wir beim Beweis unserer Theoreme zurückgreifen werden. Zentral sind dafür die Charakterisierungen der John-Gebiete, die für die Beweise von Theorem 2 und 3 benötigt werden. Im letzten Kapitel werden wir schließlich unsere Hauptresultate beweisen.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel möchten wir dem Leser einen kurzen Überblick über bekannte Resultate aus der Funktionen- und Iterationstheorie geben. Hierbei beschränken wir uns auf die für diese Arbeit notwendigen Aussagen.

2.1 Grundlegende Definitionen und die sphärische Metrik

In diesem Abschnitt wollen wir grundlegende Definitionen einführen und Notationen klären. Außerdem stellen wir kurz die sphärische Metrik und die sphärische Ableitung dar. In dieser Arbeit werden wir immer die sphärische Metrik verwenden, sollte es nicht anders erwähnt werden.

Definition 2.1.1 (Riemannsche Zahlenkugel) Sei $S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, $N := (0, 0, 1) \in S^2$ und $\varphi : S^2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definiert durch

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}, & \text{falls } (x_1, x_2, x_3) \neq N, \\ \infty, & \text{falls } (x_1, x_2, x_3) = N. \end{cases}$$

Für $x \in S^2 \setminus N$ gilt, dass die Punkte N , x und $(\operatorname{Re} \varphi(x), \operatorname{Im} \varphi(x), 0)$ auf einer Geraden in \mathbb{R}^3 liegen. Die Abbildung φ (beziehungsweise $\varphi|_{S^2 \setminus N}$) heißt *stereographische Projektion*. Sie ist bijektiv und es gilt

$$\varphi^{-1}(z) = \begin{cases} \frac{1}{|z|^2 + 1} (2 \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, |z|^2 - 1), & \text{falls } z \in \mathbb{C}, \\ N, & \text{falls } z = \infty. \end{cases}$$

Man nennt $\overline{\mathbb{C}}$ beziehungsweise S^2 *Riemannsche Zahlenkugel* oder auch *Sphäre*.

Definition 2.1.2 (Holomorph) Sei $G \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ein Gebiet mit $\infty \in G$. Eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *holomorph*, falls $f|_{G \setminus \{\infty\}}$ holomorph ist und mit $H := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{\infty\}, 1/z \in G\}$ auch $g : H \rightarrow \mathbb{C}$,

$$g(z) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{z}\right), & \text{falls } z \neq 0 \\ f(\infty), & \text{falls } z = 0 \end{cases}$$

holomorph ist.

Definition 2.1.3 (Meromorph) Sei $G \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ und f nicht konstant ∞ . Dann heißt f *meromorph*, wenn jeder Punkt aus G eine Umgebung U besitzt, in der f oder $\frac{1}{f}$ holomorph ist.

Definition 2.1.4 (Rationale Abbildungen und Möbiustransformationen) Sind $P(z)$ und $Q(z)$ Polynome, $Q(z)$ nicht konstant 0 und $f(z) = P(z)/Q(z)$, so heißt f *rational*. Die Funktion $f : \{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ kann dann zu einer meromorphen Funktion von $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ fortgesetzt werden. Sind P und Q teilerfremd, so heißt $\deg(f) := \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$ *Grad von f* . Eine rationale Funktion vom Grad 1 heißt *Möbiustransformation*.

Bemerkung 2.1.5 Jede meromorphe Abbildung $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ist rational.

Definition 2.1.6 (Konform) Wir nennen eine biholomorphe oder bijektive und meromorphe Abbildung f *konform*.

Definition 2.1.7 (Sphärische Metrik) Wir definieren die *sphärische Metrik* $d\sigma$ durch

$$d\sigma = \frac{2|dz|}{1 + |z|^2}.$$

Damit ist der sphärische Abstand von zwei Punkten auf der Sphäre gegeben durch die kürzeste Länge eines Weges auf der Sphäre, der die beiden Punkte miteinander verbindet.

Definition 2.1.8 Wir bezeichnen mit $\delta(\cdot, \cdot)$ oder $\text{dist}_s(\cdot, \cdot)$ den Abstand bezüglich der sphärischen Metrik σ . Genauso bezeichnen wir mit $\text{dist}_e(\cdot, \cdot)$ den Abstand bezüglich der euklidischen Metrik. Es gilt dann für $z, w \in \overline{\mathbb{C}}$

$$\delta(z, w) := \begin{cases} 2 \arctan\left(\frac{|z-w|}{|1+\bar{z}w|}\right), & \text{falls } z, w \neq \infty \text{ und } 1 + \bar{z}w \neq 0 \\ 2 \arctan\left(\frac{1}{|w|}\right), & \text{falls } z = \infty, 0 \neq w \neq \infty \\ \pi, & \text{falls } 1 + \bar{z}w = 0, \text{ oder } z = \infty, w = 0 \\ 0, & \text{falls } z = w = \infty. \end{cases}$$

Für $\Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, $z \in \Omega$ definieren wir $\delta(z, \partial\Omega) := \text{dist}_s(z, \partial\Omega)$. Für $z \in \overline{\mathbb{C}}$ und $r > 0$ definieren wir $B_s(z, r) := \{x \in \overline{\mathbb{C}} : \delta(z, x) < r\}$ und für $y \in \mathbb{C}$ definieren wir $B_e(y, r) := \{x \in \mathbb{C} : |x - y| < r\}$. Wir bezeichnen mit $\mathbb{D} := \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| < 1\} = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \delta(z, 0) < \pi/2\}$ die *Einheitskreisscheibe*.

Bemerkung 2.1.9 Für die sphärische Metrik gilt auf $\overline{\mathbb{D}}$

$$|dz| \leq d\sigma \leq 2|dz|,$$

da $1 \leq 1 + |z|^2 \leq 2$ auf $\overline{\mathbb{D}}$. Damit gilt für alle $W \subseteq \mathbb{D}$

$$\text{diam}_e W \leq \text{diam}_s W \leq 2 \text{diam}_e W,$$

wobei wir mit diam_e und diam_s den Durchmesser bezüglich der euklidischen beziehungsweise sphärischen Metrik bezeichnen.

Bemerkung 2.1.10 Es gilt insbesondere $\text{diam}_s \overline{\mathbb{C}} = \pi$.

Bemerkung 2.1.11 (Chordale Metrik) Häufig wird auch die *chordale Metrik* χ als Metrik auf der Sphäre benutzt. Seien $z, w \in \overline{\mathbb{C}}$, dann definieren wir die chordale Metrik als

$$\chi(z, w) := \begin{cases} \frac{2|z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}}, & \text{falls } z, w \neq \infty \\ \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}, & \text{falls } z = \infty, w \neq \infty \\ 0, & \text{falls } z = w = \infty. \end{cases}$$

Der chordale Abstand von zwei Punkten auf der Sphäre entspricht somit dem euklidischen Abstand der Punkte im \mathbb{R}^3 .

Daraus folgt unmittelbar, dass die chordale und die sphärische Metrik äquivalent sind, denn es gilt für alle $z, w \in \overline{\mathbb{C}}$

$$\chi(z, w) \leq \delta(z, w) \leq \frac{\pi}{2} \chi(z, w).$$

Definition 2.1.12 (Sphärische Ableitung) Sei $G \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ offen und $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ meromorph. Dann definieren wir die *sphärische Ableitung von f in z* als

$$f^*(z) := \lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{\delta(f(\zeta), f(z))}{\delta(\zeta, z)}.$$

Daraus folgt für $z \neq \infty$ und $f(z) \neq \infty$

$$f^*(z) = \frac{(1 + |z|^2)|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}.$$

Für $f(z) = \infty$ und $z \neq \infty$ folgt die Existenz aus $\delta(a, b) = \delta(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$ für $a, b \in \overline{\mathbb{C}}$ mit $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$. Da die sphärische und die chordale Metrik äquivalent sind, gilt außerdem

$$f^*(z) = \lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{\chi(f(\zeta), f(z))}{\chi(\zeta, z)}.$$

Häufig wird auch für $G \subseteq \mathbb{C}$, das heißt für $z \neq \infty$

$$f^\sharp(z) := \lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{\chi(f(\zeta), f(z))}{|\zeta - z|}$$

als sphärische Ableitung definiert. Daraus folgt für $f(z) \neq \infty$

$$f^\sharp(z) = \frac{2|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}.$$

Für $f(z) = \infty$ folgt die Existenz aus $\chi(a, b) = \chi(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$ für $a, b \in \overline{\mathbb{C}}$ mit $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$.

Wir wollen allerdings die erste Definition benutzen, da sie dieselbe Metrik im Definitionsbereich und Bildbereich verwendet und daher gewisse Symmetrien aufweist, wie auch die nächste Bemerkung zeigt.

Lemma 2.1.13 *Die sphärische Ableitung genügt der Kettenregel und dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion. Außerdem ist die sphärische Ableitung nicht negativ. Ist $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ eine sphärische Isometrie, also eine Rotation der Sphäre, so ist $\varphi^* \equiv 1$.*

Beweis: Seien f und g rationale Abbildungen und $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (f \circ g)^*(z) &= \frac{(1 + |z|^2)|(f \circ g)'(z)|}{1 + |(f \circ g)(z)|^2} \\ &= \frac{(1 + |z|^2)|f'(g(z))||g'(z)|(1 + |g(z)|^2)}{1 + |(f(g(z)))|^2} \frac{(1 + |g(z)|^2)}{(1 + |g(z)|^2)} \\ &= f^*(g(z))g^*(z). \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$(f^{-1})^*(f(z)) = \frac{(1 + |f(z)|^2)|(f^{-1})'(f(z))|}{(1 + |(f^{-1})(f(z))|^2)} = \frac{(1 + |f(z)|^2)}{(1 + |z|^2)|f'(z)|} = \frac{1}{f^*(z)}.$$

□

Definition 2.1.14 (Weg) Sei $[a, b]$ ein Intervall in \mathbb{R} und $f : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ eine stetige Abbildung. Dann heißt f *Weg* oder *Jordanbogen*, wenn $f|_{[a,b]}$ injektiv ist, und *geschlossener Weg* oder *Jordankurve*, wenn zusätzlich $f(a) = f(b)$ gilt.

Sind $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ zwei Wege mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(a)$, so bezeichnen wir mit $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ die Komposition der beiden Wege. Dabei werden beide Wege nacheinander durchlaufen.

Bemerkung 2.1.15 Oft wird auch nur das Bild $f([a, b])$ als Weg bezeichnet.

Definition 2.1.16 (Kontinuum) $K \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ heißt *Kontinuum*, wenn K kompakt und zusammenhängend ist sowie mehr als einen Punkt enthält.

Definition 2.1.17 (Glatter Rand) Sei $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ ein Gebiet. Dann heißt $\partial\Omega$ *glatt*, wenn jede Komponente U von $\partial\Omega$ eine Parametrisierung durch einen glatten Weg besitzt, das heißt ein Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ existiert mit $\gamma([a, b]) = U$ und $\gamma' \neq 0$.

Definition 2.1.18 (k -fach zusammenhängend) Sei $\Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ein Gebiet und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt Ω *k -fach zusammenhängend*, wenn $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ genau k Zusammenhangskomponenten besitzt. 0-fach und 1-fach zusammenhängende Gebiete werden auch *einfach zusammenhängend* genannt.

2.2 Grundlagen aus der Funktionentheorie

Die Sätze und Aussagen in diesem Abschnitt sind allgemein bekannt und in den meisten Büchern über Funktionentheorie zu finden, wie zum Beispiel [9], [14] oder [26].

Definition 2.2.1 (Univalent) Ist $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ offen, dann heißt $f : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ *univalent* oder auch *schlicht*, wenn f meromorph und injektiv ist.

Für einen Beweis des folgenden Satzes siehe [26], Theorem 1.3.

Satz 2.2.2 (Koebescher Verzerrungssatz) *Sei $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und injektiv mit $f(0) = 0$ und $|f'(0)| = 1$. Dann gilt*

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

und

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$$

für $z \in \mathbb{D}$. Außerdem gilt

$$f(\mathbb{D}) \supseteq B_e\left(0, \frac{1}{4}\right).$$

Bemerkung 2.2.3 Gleichheit gilt für

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Diese Funktion bildet \mathbb{D} biholomorph auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -\frac{1}{4}]$ ab.

Wir wollen obigen Satz auf injektive holomorphe Funktionen $f : B_e(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$ übertragen. Die durch

$$z \mapsto \frac{f(a+rz) - f(a)}{rf'(a)}$$

definierte Funktion erfüllt die Voraussetzungen des Koebeschen Verzerrungssatzes. Man erhält folgendes Ergebnis:

Satz 2.2.4 (Hilfssatz) *Sei $r > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Sei $f : B_e(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Es seien $0 < \varrho < 1$ und $z \in \partial B_e(z_0, \varrho r)$. Dann gilt*

$$\frac{\varrho}{(1+\varrho)^2} \leq \frac{|f(z) - f(z_0)|}{r|f'(z_0)|} \leq \frac{\varrho}{(1-\varrho)^2}$$

und

$$\frac{1-\varrho}{(1+\varrho)^3} \leq \frac{|f'(z)|}{|f'(z_0)|} \leq \frac{1+\varrho}{(1-\varrho)^3}.$$

Außerdem gilt

$$f(B_e(z_0, r)) \supseteq B_e\left(f(z_0), \frac{1}{4}r|f'(z_0)|\right).$$

Für einen Beweis des folgenden Satzes siehe [9, Theorem 3.6].

Satz 2.2.5 (Monodromiesatz) *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $U \subseteq G$ ein Gebiet und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Es sei f holomorph fortsetzbar entlang jeder Kurve in G . Dann existiert eine holomorphe Funktion $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F|_U = f$.*

Der Riemannsche Abbildungssatz ist einer der grundlegendsten Sätze der Funktionentheorie, einen Beweis findet man in [14, Kapitel II, § 2].

Satz 2.2.6 (Riemannscher Abbildungssatz) *Sei $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $|\overline{\mathbb{C}} \setminus U| \geq 2$. Sei $z_0 \in U \setminus \{\infty\}$. Dann existiert genau eine konforme Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{D}$ mit $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) > 0$.*

Eine ähnliche Version des Riemannschen Abbildungssatzes gilt auch für zweifach zusammenhängende Gebiete. Ein Beweis des folgenden Satzes ist in [14, Kapitel V, § 1] zu finden.

Satz 2.2.7 (Abbildungssatz für Ringgebiete) *Sei $A \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ein zweifach zusammenhängendes Gebiet, sodass jede Komponente von $\overline{\mathbb{C}} \setminus A$ mindestens 2 Punkte enthält. Dann existiert eine konforme Abbildung $f : A \rightarrow \{z \in \overline{\mathbb{C}} : 1 < |z| < r\}$ für ein eindeutig bestimmtes $r > 1$.*

Für einen Beweis des folgenden Satzes siehe [9, Satz 1.1].

Satz 2.2.8 (Schwarzsches Spiegelungsprinzip) *Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet derart, dass für alle $z \in U$ auch $\bar{z} \in U$ ist. Ferner sei $f : \{z \in U : \text{Im}(z) \geq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung, die auf $\{z \in U : \text{Im}(z) > 0\}$ holomorph und auf $\{z \in U : \text{Im}(z) = 0\}$ reellwertig ist. Dann lässt sich f durch $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ auf U holomorph fortsetzen.*

2.3 Eigentliche Abbildungen und Blaschke-Produkte

In diesem Abschnitt stellen wir Resultate über eigentliche Abbildungen zusammen, die in dieser Arbeit gebraucht werden.

Definition 2.3.1 (Eigentliche Abbildungen) *Es seien $U, V \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ und $f : U \rightarrow V$ eine meromorphe Funktion. Dann heißt f eigentlich, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq V$ auch $f^{-1}(K)$ kompakt ist.*

Definition 2.3.2 (Abbildungsgrad) *Es seien $U, V \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ Gebiete und $f : U \rightarrow V$ eine meromorphe Funktion. Ferner sei $k \in \mathbb{N}$. Dann heißt k Abbildungsgrad von f oder $\deg(f)$, wenn zu jedem $y \in V$ genau k Urbilder in U gezählt gemäß Vielfachheit existieren. Für rationale Funktionen $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ entspricht $\deg(f)$ genau dem Grad von f , daher verwenden wir dieselbe Notation.*

Einen Beweis des folgenden Satzes findet man in [4].

Satz 2.3.3 (Charakterisierung eigentlicher Abbildungen) *Es seien $U, V \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ Gebiete und $f : U \rightarrow V$ eine meromorphe Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (i) *f ist eine eigentliche Abbildung.*
- (ii) *Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ derart, dass f den Abbildungsgrad k besitzt.*

(iii) Für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in U^{\mathbb{N}}$ mit

$$\text{dist}_s(z_n, \partial U) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

gilt

$$\text{dist}_s(f(z_n), \partial V) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Bemerkung 2.3.4 Es seien $U, V \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ Gebiete und $f : U \rightarrow V$ eine eigentliche Abbildung. Besitzt f eine stetige Fortsetzung auf ∂U , so folgt $f(\partial U) = \partial V$ aus der letzten Eigenschaft.

Für den folgenden Satz findet man einen Beweis in [28, Kapitel 1, Abschnitt 3].

Satz 2.3.5 (Riemann-Hurwitz-Formel) *Es seien $m, n \in \mathbb{N}_0$. Ferner seien U ein m -fach zusammenhängendes und V ein n -fach zusammenhängendes Gebiet in $\overline{\mathbb{C}}$. Desweiteren sei $f : U \rightarrow V$ eine eigentliche Abbildung vom Grad $k \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der kritischen Punkte von f gezählt gemäß Vielfachheit. Dann gilt*

$$m - 2 = k(n - 2) + r.$$

Definition 2.3.6 (Blaschke-Produkt) Eine rationale Funktion B vom Grad $d \in \mathbb{N}$ heißt *endliches Blaschke-Produkt*, wenn es ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$ und $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{D}$ so gibt, dass

$$B(z) = c \prod_{j=1}^d \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j}z}$$

für alle $z \in \overline{\mathbb{C}}$ gilt.

Für einen Beweis des folgenden Satzes siehe [5].

Satz 2.3.7 *Es sei $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ eine holomorphe Abbildung. Dann ist f genau dann eine eigentliche Abbildung, wenn ein Blaschke-Produkt B existiert mit $B|_{\mathbb{D}} = f$.*

2.4 Fatou- und Juliamengen

In diesem Abschnitt behandeln wir die Fatou- und die Juliamenge. Wir geben neben der Definition einige für diese Arbeit wichtige Resultate an, wie die Charakterisierung der periodischen Fatoukomponenten.

Wenn nicht anders erwähnt, sei $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ im Folgenden stets eine rationale Funktion, deren Grad mindestens zwei beträgt.

Die folgenden Aussagen lassen sich alle in [3], [7], [24] und [28] finden. Viele dieser Aussagen gelten, teilweise leicht abgewandelt, auch für ganze Funktionen.

Definition 2.4.1 (Normale Familien) Es sei $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ offen und F eine Familie von Funktionen von U nach $\overline{\mathbb{C}}$. Wir nennen F *normal*, falls jede Folge in F eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt. Für $z_0 \in U$ nennen wir F *normal in z_0* , falls eine Umgebung V von z_0 so existiert, dass $\{f|_V : f \in F\}$ normal ist.

Einen Beweis des folgenden Satzes findet man in [7, Kapitel I, Theorem 3.2].

Satz 2.4.2 (Satz von Montel) *Seien $G \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ein Gebiet, F eine Familie von meromorphen Funktionen von G nach $\overline{\mathbb{C}}$ und $a_1, a_2, a_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden. Gilt für alle $f \in F$ $f(z) \neq a_j$ für $j \in \{1, 2, 3\}$, so ist F normal.*

Definition 2.4.3 (Fatou- und Juliamenge) Wir nennen

$$\mathcal{F}(f) := \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \{f^n : n \in \mathbb{N}\} \text{ ist normal in } z\}$$

die *Fatoumenge* von f und

$$\mathcal{J}(f) := \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{F}(f)$$

die *Juliamenge* von f .

Wenn klar ist, von welcher Funktion gesprochen wird, schreiben wir nur \mathcal{J} beziehungsweise \mathcal{F} .

Definition 2.4.4 (Orbit) Sei $z \in D(f)$. Dann heißt

$$O^+(z) := \{f^n(z) : n \in \mathbb{N}_0\}$$

Vorwärtsorbit von z (unter f) und

$$O^-(z) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(z)$$

Rückwärtsorbit von z (unter f). Weiter heißt

$$O(z) := O^+(z) \cup O^-(z)$$

Orbit.

Definition 2.4.5 (Menge der kritischen Punkte) Es seien $U, V \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ Gebiete und es sei $f : U \rightarrow V$ eine meromorphe Abbildung. Dann bezeichnen wir mit Crit_f die *Menge der kritischen Punkte* von f .

Definition 2.4.6 (Postkritische Menge) Sei f eine rationale Abbildung. Dann definieren wir

$$P(f) := \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\text{Crit}_f)}$$

als die *postkritische Menge* von f .

Definition 2.4.7 (Klassifikation periodischer Punkte) Sei $z_0 \in D(f)$. Der Punkt z_0 heißt *periodisch*, falls $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $f^n(z_0) = z_0$. Das kleinste n mit dieser Eigenschaft heißt *Periode* von z_0 .

Sei nun z_0 periodisch mit Periode n . Der *Multiplikator* λ von z_0 ist dann definiert durch

$$\lambda := \begin{cases} (f^n)'(z_0), & \text{falls } z_0 \in \mathbb{C} \\ \lambda = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{f^n(\frac{1}{z})} \right) \Big|_0, & \text{falls } z_0 = \infty. \end{cases}$$

Der Punkt z_0 heißt

- *anziehend*, falls $|\lambda| < 1$ gilt,
- *indifferent*, falls $|\lambda| = 1$ gilt und
- *abstoßend*, falls $|\lambda| > 1$ gilt.

Falls $|\lambda| = 1$ gilt, so existiert $\alpha \in [0, 1)$ mit $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$. Der Punkt z_0 heißt *rational indifferent*, falls $\alpha \in \mathbb{Q}$ gilt, und *irrational indifferent*, falls $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt.

Der Punkt z_0 heißt *superattraktiv*, falls $\lambda = 0$ gilt. Ist z_0 anziehender oder rational indifferenter periodischer Punkt der Periode p , so bezeichnen wir mit $A(z_0) := \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \lim_{n \rightarrow \infty} f^{pn}(z) = z_0\}$ den *Einzugsbereich von z_0* und mit $A^*(z_0)$ die Komponente von $A(z_0)$, die z_0 enthält. $A^*(z_0)$ wird auch *unmittelbarer Einzugsbereich von z_0* genannt. Periodische Punkte der Periode 1 heißen *Fixpunkte*.

Bemerkung 2.4.8 (Eigenschaften der Fatou- und Juliamengen) Die folgenden Eigenschaften sind entweder leicht einzusehen oder entsprechen bekannten Sätzen aus der Komplexen Dynamik.

- Die Fatoumenge ist offen und die Juliamenge ist abgeschlossen.
- Die Julia- und die Fatoumenge sind beide unter Vorwärts- und Rückwärtsiteration invariant, das heißt für $z \in \overline{\mathbb{C}}$ gilt $f(z) \in \mathcal{F}(f) \Leftrightarrow z \in \mathcal{F}(f)$ und $f(z) \in \mathcal{J}(f) \Leftrightarrow z \in \mathcal{J}(f)$. Außerdem gilt $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(f^n)$, $\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(f^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Sind f und g rationale Funktionen, die durch eine Möbiustransformation T konjugiert sind, etwa $f = T^{-1} \circ g \circ T$, dann gilt $\mathcal{F}(f) = T(\mathcal{F}(g))$ und $\mathcal{J}(f) = T(\mathcal{J}(g))$.
- Abstoßende und rational indifferente periodische Punkte liegen in der Juliamenge. Anziehende periodische Punkte liegen in der Fatoumenge.
- \mathcal{J} ist der Abschluss der Menge der abstoßenden periodischen Punkte von f .
- Ist z_0 anziehender periodischer Punkt von f , so gilt $\mathcal{J} = \partial A(z_0)$.

- Ist f rational, $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ offen mit $U \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$, so existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f^n(U \cap \mathcal{J}) = \mathcal{J}$ für alle $n \geq n_0$.
- Ist f rational mit Grad mindestens zwei, so gilt $|\mathcal{J}| = \infty$.

Definition 2.4.9 Sei U eine Komponente von $\mathcal{F}(f)$. Dann heißt U *periodisch*, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $f^n(U) \subseteq U$. Das kleinste n mit dieser Eigenschaft heißt *Periode* von U . Im Falle $n = 1$ heißt U *invariant*. Weiter heißt U *präperiodisch*, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $f^n(U) \subseteq V$ für eine periodische Komponente V gilt. Eine nicht präperiodische Komponente von $\mathcal{F}(f)$ heißt *wandernd*.

Definition 2.4.10 Sei U eine periodische Komponente der Periode p von $\mathcal{F}(f)$, für ein $p \in \mathbb{N}$. Dann nennen wir U

- *Böttchergebiet*, falls U einen superattraktiven periodischen Punkt enthält,
- *Schrödergebiet*, falls U einen attraktiven periodischen Punkt enthält, der nicht superattraktiv ist,
- *parabolisches Gebiet* oder auch *Leaugebiet*, falls ein rational indifferent periodischer Punkt $z_0 \in \partial U$ existiert, sodass $f^{nj}|_U \rightarrow f^j(z_0)$ für $j \in \{1, \dots, p\}$, $n \rightarrow \infty$,
- *Siegelscheibe*, falls ein $R > 0$ und eine konforme Abbildung $\varphi : U \rightarrow D = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| < R\}$ sowie $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ existieren, sodass $\varphi(f^p(z)) = e^{2\pi i \alpha} \varphi(z)$ für $z \in U$ gilt,
- *Herman-Ring*, falls $R > r > 0$ und eine konforme Abbildung $\varphi : U \rightarrow A = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : r < |z| < R\}$ sowie $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ existieren, sodass $\varphi(f^p(z)) = e^{2\pi i \alpha} \varphi(z)$ für $z \in U$ gilt.

Die ersten beiden Begriffe werden unter dem Begriff *Attraktionsgebiete* und die letzten beiden Gebiete unter dem Begriff *Rotationsgebiete* oder auch *singuläre Gebiete* zusammengefasst.

Satz 2.4.11 (Klassifikation periodischer Fatoukomponenten) *Sei U eine periodische Komponente von $\mathcal{F}(f)$. Dann gilt genau einer der folgenden Fälle:*

- U ist ein *Attraktionsgebiet*.
- U ist ein *parabolisches Gebiet*.
- U ist ein *Rotationsgebiet*.

Bemerkung 2.4.12 Im Fall einer ganzen Funktion können auch noch sogenannte Bakergebiete auftreten. Eine periodische Komponente der Fatoumenge einer ganzen Funktion heißt *Bakergebiet*, falls $f^n|_U \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$.

Bemerkung 2.4.13 Sei U eine periodische Komponente der Periode p von $\mathcal{F}(f)$. Ist U ein Attraktionsgebiet und $z_0 \in U$ der attraktive periodische Punkt, so gilt

$$f^{np}|_U \rightarrow z_0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Ist U ein Rotationsgebiet, so ist $f_U^p \rightarrow U$ bijektiv und es existiert eine Folge $(n_k) \in \mathbb{N}$ mit

$$f^{n_k p}|_U \rightarrow \text{id}_U \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

Bemerkung 2.4.14 Sei f eine rationale Abbildung, Ω' eine präperiodische Fatoukomponente. Dann existiert nach Definition ein $k \in \mathbb{N}$ und eine periodische Fatoukomponente Ω mit $f^k(\Omega') \subseteq \Omega$. Da $f^k : \Omega' \rightarrow \Omega$ aber eine eigentliche Abbildung ist, gilt bereits $f^k(\Omega') = \Omega$.

Der folgende Satz ist sehr bekannt und ist ein wichtiges Resultat der Untersuchung des Iterationsverhaltens rationaler Funktionen dar. Für einen Beweis siehe [28, Kapitel 3, § 1].

Satz 2.4.15 (Satz von Sullivan) *Ist f rational, so besitzt f keine wandernden Fatoukomponenten.*

Für Beweise der folgenden drei Sätze siehe [7, Kapitel III, Theorem 2.2], [7, Kapitel III, Theorem 2.3] und [7, Kapitel V, Theorem 1.1].

Satz 2.4.16 *Ist z_0 ein attraktiver periodischer Punkt der Periode p , dann enthält*

$$\bigcup_{j=1}^p A^*(f^j(z_0))$$

mindestens einen kritischen Punkt.

Satz 2.4.17 *Ist z_0 ein Fixpunkt mit Multiplikator 1, dann enthält jedes zugehörige parabolische Gebiet einen kritischen Punkt.*

Satz 2.4.18 *Ist U eine Siegelscheibe oder ein Herman-Ring von f , so ist der Rand von U im Abschluss der postkritischen Menge von f enthalten.*

2.5 Nichtuniforme Hyperbolizität

Es gibt sehr viele Formen von nichtuniformer Hyperbolizität, die alle für sich einige der Eigenschaften von hyperbolischen Abbildungen erhalten. In dieser Arbeit werden wir uns hauptsächlich auf semihyperbolische Abbildungen konzentrieren.

Definition 2.5.1 (Subhyperbolizität) Eine rationale Funktion f heißt *subhyperbolisch*, wenn alle kritischen Punkte in der Juliamenge präperiodisch sind und wenn alle kritischen Punkte in der Fatoumenge in Attraktionsgebieten liegen.

Bemerkung 2.5.2 Insbesondere enthält die Juliamenge einer subhyperbolischen Funktion nur endlich viele Punkte aus der postkritischen Menge.

Definition 2.5.3 (Semihyperbolisch) Sei f eine rationale Funktion und $z \in \mathcal{J}$. f heißt *semihyperbolisch in z* , wenn ein $r > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ existieren, sodass für alle $n > 0$ sowie für alle Komponenten U von $f^{-n}(B_s(z, r))$ Folgendes gilt:

$$\deg(f^n|_U) \leq N.$$

Ist f semihyperbolisch in allen Punkten aus der Juliamenge, so nennen wir f *semihyperbolisch*. Da die Juliamenge kompakt ist, existieren ein gemeinsames N und ein gemeinsames r für alle Punkte aus der Juliamenge.

Definition 2.5.4 (ExpShrink) Eine rationale Abbildung f erfüllt die *Exponential-Shrinking-of-components-Bedingung*, kurz *ExpShrink*, wenn $\lambda > 1$ und $r > 0$ existieren, sodass für alle $z \in \mathcal{J}$ und $n > 0$ sowie für alle Komponenten W von $f^{-n}(B_s(z, r))$ Folgendes gilt:

$$\text{diam}_s W < \lambda^{-n}.$$

Bemerkung 2.5.5 Nach [27] ist ExpShrink äquivalent zu einer großen Anzahl von anderen Typen nichtuniformer Hyperbolizität.

Wir führen nun eine schwächere Version von ExpShrink ein.

Definition 2.5.6 (SumShrink) Eine rationale Abbildung f erfüllt die *Summable-Shrinking-of-components-Bedingung*, kurz *SumShrink*, wenn $r > 0$ und eine Folge positiver Zahlen $(\omega_n)_{n \geq 1}$ existieren, sodass

$$\sum_{n > 0} \omega_n < \infty$$

gilt und für alle $z \in \mathcal{J}$ und $n > 0$ sowie alle Komponenten W von $f^{-n}(B_s(z, r))$ Folgendes gilt:

$$\text{diam}_s W < \omega_n.$$

Definition 2.5.7 (Nichtrekurrent) Ein Punkt x heißt *nichtrekurrent*, wenn $x \notin \omega(x)$, wobei

$$\omega(x) = \bigcap_{N \geq 0} \overline{\{f^n(x) : n \geq N\}}$$

die Häufungspunktmenge des Orbits von x ist.

Definition 2.5.8 Eine rationale Abbildung f erfüllt die *Misiurewicz-Bedingung*, wenn f keine parabolischen Gebiete hat und alle kritischen Punkte aus der Juliamenge nichtrekurrent sind.

Satz 2.5.9 Erfüllt f die Misiurewicz-Bedingung, dann erfüllt f ExpShrink.

Der letzte Satz ist eine Folgerung aus dem Hauptresultat von [23].

Bemerkung 2.5.10 Wir verweisen hier auf eine Arbeit von Mihalache [23], in der er Ringgebietkonstruktionen, wie auch wir sie später verwenden werden, und ein Resultat von Mañé nutzt. Carleson, Jones und Yoccoz haben in ihrer Arbeit das Gleiche für Polynome bewiesen, ebenfalls mit Hilfe des Resultats von Mañé.

2.6 Die quasi-hyperbolische Länge und die hyperbolische Metrik

Neben der sphärischen und euklidischen Metrik werden wir in dieser Arbeit auch die hyperbolische Metrik benutzen, daher geben wir hier eine kurze Einführung. Ebenso stellen wir hier die quasi-hyperbolische Länge vor. Für mehr Informationen und Beweise der folgenden Aussagen sei der Leser auf [24, § 2] und [28, Kapitel 1] verwiesen.

Definition 2.6.1 (Überlagerungsabbildung) Seien $U, V \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ Gebiete und $f : U \rightarrow V$ meromorph. Dann heißt f *Überlagerungsabbildung*, wenn für alle $v \in V$ eine Umgebung $W \subseteq V$ existiert, sodass für alle Komponenten X von $f^{-1}(W)$ die Abbildung $f : X \rightarrow W$ bijektiv ist.

Definition 2.6.2 (Hyperbolische Gebiete) Wir nennen $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ *hyperbolisches Gebiet*, wenn eine Überlagerungsabbildung $f : \mathbb{D} \rightarrow U$ existiert.

Definition 2.6.3 (Hyperbolische Dichte auf \mathbb{D}) Wir definieren für alle $z \in \mathbb{D}$

$$\varrho_{\mathbb{D}}(z) := \frac{2}{1 - |z|^2}$$

und nennen $\varrho_{\mathbb{D}}$ die *hyperbolische Dichte auf \mathbb{D}* .

Definition 2.6.4 (Hyperbolische Dichte auf hyperbolischen Gebieten) Es sei U ein hyperbolisches Gebiet und $f : \mathbb{D} \rightarrow U$ eine Überlagerungsabbildung. Dann definieren wir die *Dichte der hyperbolischen Metrik auf U* durch

$$\varrho_U(f(z))|f'(z)| = \varrho_{\mathbb{D}}(z)$$

für alle $z \in \mathbb{D}$.

Bemerkung 2.6.5 Die letzte Definition ist unabhängig von der Wahl der Überlagerungsabbildung.

Da wir die hyperbolische Dichte auf hyperbolischen Gebieten eingeführt haben, können wir nun die hyperbolische Metrik definieren.

Definition 2.6.6 (Hyperbolische Metrik auf hyperbolischen Gebieten) Es sei U ein hyperbolisches Gebiet, $f : \mathbb{D} \rightarrow U$ eine Überlagerungsabbildung und $z, w \in U$. Wir definieren dann

$$d_U(z, w) := \inf \int_{\gamma} \varrho_U(\zeta) |d\zeta|,$$

wobei das Infimum über alle Wege γ gebildet wird, die z mit w in U verbinden, und nennen d_U die *hyperbolische Metrik auf U* .

Für einen Beweis des folgenden Satzes siehe [24, Satz 2.11].

Satz 2.6.7 (Lemma von Schwarz) *Es seien U und V hyperbolische Gebiete und $f : U \rightarrow V$ eine meromorphe Abbildung. Dann gilt*

$$d_V(f(z), f(w)) \leq d_U(z, w)$$

für alle $z, w \in U$.

Bemerkung 2.6.8 Seien U und V hyperbolische Gebiete mit $U \subseteq V$. Wendet man Satz 2.6.7 mit $f = \text{id}$ an, so erhält man für alle $z, w \in U$

$$d_V(z, w) \leq d_U(z, w).$$

Definition 2.6.9 (Quasi-hyperbolische Länge) Seien $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ ein Gebiet und $\gamma \subseteq \Omega$ ein Weg. Wir definieren die *quasi-hyperbolische Länge von γ* durch

$$l_{qh}(\gamma) := \int_{\gamma} \frac{1}{\delta(z, \partial\Omega)} |d\sigma(z)|.$$

Diese Länge induziert den *quasi-hyperbolischen Abstand* $\text{dist}_{qh}(\cdot, \cdot)$ auf Ω . Es gilt also für $z, w \in \Omega$

$$\text{dist}_{qh}(z, w) := \inf_{\gamma} l_{qh}(\gamma),$$

wobei das Infimum über alle Kurven γ gebildet wird, die die Punkte z und w miteinander verbinden und in Ω liegen.

Sei außerdem $l_s(\gamma)$ definiert als die Länge von γ bezüglich der sphärischen Metrik und $l_e(\gamma)$ definiert als die Länge von γ bezüglich der euklidischen Metrik.

2.7 Modul und Ringgebiet

Dieser Teil der Arbeit beschäftigt sich mit Ringgebieten und dem Modul von Ringgebieten. Auch wenn dies kein zentrales Thema dieser Arbeit ist, stellt es an entscheidenden Stellen die nötigen Mittel für unsere Beweise bereit.

Definition 2.7.1 (Modul und Ringgebiet) Sei $A \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ein *Ringgebiet*, das heißt ein zweifach zusammenhängendes Gebiet, sodass jede Komponente von $\overline{\mathbb{C}} \setminus A$ mindestens zwei Punkte enthält. Dann existieren nach Satz 2.2.7 eine konforme Abbildung f und ein eindeutig bestimmtes $r > 1$, sodass $f(A) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : 1 < |z| < r\}$ gilt. Damit können wir den *Modul eines Ringgebietes* A wie folgt definieren:

$$\text{mod } A = \frac{\log(r)}{2\pi}.$$

Folglich ist der Modul eine konforme Invariante.

Notation 2.7.2 Sei $A_s(r, R) := B_s(0, R) \setminus \overline{B_s(0, r)}$ und $A_s(z, r, R) := B_s(z, R) \setminus \overline{B_s(z, r)}$ für $0 < r < R$, $z \in \overline{\mathbb{C}}$ sowie entsprechend $A_e(r, R)$ und $A_e(z, r, R)$ für $0 < r < R$, $z \in \mathbb{C}$.

Bemerkung 2.7.3 Damit gilt für $0 < r < R$

$$\text{mod } A_e(r, R) = \frac{\log\left(\frac{R}{r}\right)}{2\pi}.$$

Lemma 2.7.4 Ist $A_s(r, R) = A_e(r', R')$ mit $R' < 1$, dann gilt

$$\frac{R}{r} < \frac{R'}{r'}.$$

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass für $0 \neq z \in \mathbb{D}$ und $0 < \alpha < 1$

$$\frac{\delta(0, z)}{\delta(0, \alpha z)} < \frac{1}{\alpha} = \frac{|z|}{|\alpha z|}$$

gilt. Sei also $0 \neq z \in \mathbb{D}$, dann gilt

$$\frac{\delta(0, z)}{\delta(0, \alpha z)} = \frac{2 \arctan(|z|)}{2 \arctan(\alpha|z|)} = \frac{\arctan(|z|)}{\arctan(\alpha|z|)}.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \arctan(\alpha|z|) &= \int_0^{\alpha|z|} \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^{|z|} \frac{\alpha}{1+\alpha^2 s^2} ds \\ &= \alpha \int_0^{|z|} \frac{1}{1+\alpha^2 s^2} ds \\ &> \alpha \int_0^{|z|} \frac{1}{1+s^2} ds \\ &= \alpha \arctan(|z|). \end{aligned}$$

Damit folgt $\frac{\delta(0,z)}{\delta(0,\alpha z)} < \frac{1}{\alpha}$. □

Lemma 2.7.5 *Es gilt für $0 < r < R < 1$*

$$\text{mod } A_s(r, R) > \frac{\log(\frac{R}{r})}{2\pi}.$$

Beweis: Da $B_s(0, 1) \subseteq \mathbb{D}$ gilt, können $0 < r' < R' < 1$ so gewählt werden, dass

$$\text{mod } A_e(r', R') = \text{mod } A_s(r, R)$$

gilt. Dann folgt mit Lemma 2.7.4

$$\text{mod } A_s(r, R) = \text{mod } A_e(r', R') = \frac{\log(\frac{R'}{r'})}{2\pi} > \frac{\log(\frac{R}{r})}{2\pi}.$$

□

Lemma 2.7.6 (Modul unter eigentlichen Abbildungen) *Seien A und A' zweifach zusammenhängende Gebiete, sodass jede Komponente von $\overline{\mathbb{C}} \setminus A$ und $\overline{\mathbb{C}} \setminus A'$ mindestens zwei Punkte enthält, und sei $g : A \rightarrow A'$ eine eigentliche Abbildung vom Grad d . Dann gilt*

$$\text{mod } A = \frac{1}{d} \text{mod } A'.$$

Beweis: Nach dem Abbildungssatz für Ringgebiete können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $A = A_e(1, r)$ und $A' = A_e(1, r')$ mit $r, r' > 1$ gilt und dass für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ mit $|z_n| \rightarrow r$ für $n \rightarrow \infty$ auch $|g(z_n)| \rightarrow r'$ für $n \rightarrow \infty$ gilt. Es bleibt also zu zeigen, dass

$$r' = r^d$$

gilt. Wende Möbiustransformationen an, um $\partial B_e(0, r)$ und $\partial B_e(0, r')$ auf die reelle Achse abzubilden. Dann lässt sich g mit Hilfe des Schwarzschen Spiegelungsprinzips (2.2.8) holomorph auf $A_e(1, r^2)$ fortsetzen. Iteriert man diese Konstruktion und führt sie auch in der anderen Richtung durch, so lässt sich g auf diese Weise zu einer holomorphen Abbildung auf ganz $\overline{\mathbb{C}}$ fortsetzen, die $0, \infty$ sowie den Einheitskreis fixiert. Eine Abbildung vom Grad d , die auf ganz $\overline{\mathbb{C}}$ holomorph ist und $0, \infty$ sowie den Einheitskreis fixiert, ist von der Form az^d mit $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$. Für diese Familie von Funktionen gilt die Behauptung. □

Für einen Beweis des folgenden Lemmas siehe [20, Hilfssatz 6.3].

Lemma 2.7.7 (Grötzsch-Ungleichung) *Seien A ein Ringgebiet und B_1, B_2 die beiden Komponenten von $\overline{\mathbb{C}} \setminus A$. Sind $A_1, \dots, A_k \subseteq A$ disjunkte Ringgebiete, die B_1 und B_2 trennen, dann gilt*

$$\text{mod } A \geq \sum_{i=1}^n \text{mod } A_i.$$

Sind die Ringgebiete alle konzentrische Kreisringe und gilt $\bigcup_{i=1}^k \overline{A}_i = \overline{A}$, so gilt Gleichheit.

Definition 2.7.8 Ist $A \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ein Ringgebiet und sind C_1, C_2 die Komponenten von $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{A}$, dann verwenden wir folgende Notation:

$$\text{dist}_s(\overline{\mathbb{C}} \setminus A) = \text{dist}_s(C_1, C_2).$$

Definition 2.7.9 Ebenso verwenden wir die Notation

$$\text{dist}_s(\partial A) = \inf\{r > 0 : \partial C_1 \subseteq \partial C_2 + B_s(0, r) \text{ und } \partial C_2 \subseteq \partial C_1 + B_s(0, r)\}$$

für den *Hausdorff-Abstand* der beiden Komponenten des Randes von A .

Lemma 2.7.10 *Es gilt dann insbesondere*

$$\text{dist}_s(\overline{\mathbb{C}} \setminus A) \leq \text{dist}_s(\partial A).$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} \text{dist}_s(\overline{\mathbb{C}} \setminus A) &= \text{dist}_s(C_1, C_2) \\ &= \inf\{r > 0 : \partial C_1 \cap \partial C_2 + B_s(0, r) \neq \emptyset \text{ oder } \partial C_2 \cap \partial C_1 + B_s(0, r) \neq \emptyset\} \\ &\leq \inf\{r > 0 : \partial C_1 \subseteq \partial C_2 + B_s(0, r) \text{ und } \partial C_2 \subseteq \partial C_1 + B_s(0, r)\} \\ &= \text{dist}_s(\partial A). \end{aligned}$$

□

Für einen Beweis des folgenden Satzes siehe [1, Theorem 4-7 + Relation (4-21)].

Satz 2.7.11 (Modulsatz von Teichmüller) *Sei $T > 0$, $\Lambda(T) = \text{mod}(\overline{\mathbb{C}} \setminus ([-1, 0] \cup [T, \infty)))$ und A ein beliebiges Ringgebiet, das $\{-1, 0\}$ von $\{w_0, \infty\}$, mit $|w_0| = T$, trennt.*

Dann gilt $\text{mod } A \leq \Lambda(T)$,

$$16 T \leq \exp(2\pi\Lambda(T)) \leq 16(T + 1) \tag{2.7.1}$$

und

$$\Lambda(T)\Lambda(T^{-1}) = \frac{1}{4}.$$

Daher gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Lambda(T) = \infty \text{ und } \lim_{T \rightarrow 0} \Lambda(T) = 0. \tag{2.7.2}$$

Für einen Beweis des folgenden Satzes siehe [20, Kapitel II, Paragraph 1.1].

Satz 2.7.12 (Modulsatz von Grötzsch) *Sei $r > 0$, dann definieren wir das Ringgebiet von Grötzsch als $\mathbb{D} \setminus [0, r]$ und bezeichnen mit $\mu(r)$ seinen Modul. Ist A ein Ringgebiet, das 0 und $z \in \mathbb{D}$ von $\partial\mathbb{D}$ trennt, so gilt*

$$\text{mod}(A) \leq \mu(|z|).$$

Wenn A $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ von $\partial\mathbb{D}$ trennt, so folgt

$$\text{mod}(A) \leq \mu\left(\frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \overline{z_1}z_2|}\right).$$

Lemma 2.7.13 *Sei $a \in \overline{\mathbb{C}}$, $0 < R < \frac{\pi}{2}$ und $C \subseteq B_s(a, \frac{1}{2}R)$ kompakt und zusammenhängend, dann gilt*

$$\text{mod}(B_s(a, R) \setminus C) \leq \mu\left(\frac{\text{diam}_s(C)}{4R}\right).$$

Beweis: Seien $z_1, z_2 \in C$ mit $\text{diam}_s(C) = \delta(z_1, z_2)$. Sei φ die Rotationsabbildung, die a auf 0 abbildet, und $R' > 0$ so gewählt, dass $B_s(0, R) = B_e(0, R')$ gilt. Dann ist $T : z \mapsto \frac{\varphi(z)}{R'}$ die Möbiustransformation, die $B_s(a, R)$ auf \mathbb{D} abbildet. Nach Bemerkung 2.1.9 wird außerdem C in $B_s(0, \frac{\pi}{4}) \subseteq B_e(0, \frac{\pi}{4})$ abgebildet. Dann gilt $|T(z_1)|, |T(z_2)| \leq \frac{\pi}{4}$ und damit $|1 - \overline{T(z_1)} \cdot T(z_2)| < 2$. Die Abbildung $\mu : r \mapsto \mu(r) = \text{mod}(\mathbb{D} \setminus [0, r])$ ist monoton fallend. Damit folgt mit dem Modulsatz von Grötzsch

$$\begin{aligned} \text{mod}(B_s(a, R) \setminus C) &= \text{mod}(\mathbb{D} \setminus T(C)) \\ &\leq \mu\left(\frac{|T(z_1) - T(z_2)|}{|1 - \overline{T(z_1)} \cdot T(z_2)|}\right) \\ &\leq \mu\left(\frac{|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|}{R'|1 - \overline{T(z_1)} \cdot T(z_2)|}\right) \\ &\leq \mu\left(\frac{\frac{1}{2}\delta(\varphi(z_1), \varphi(z_2))}{2R}\right) \\ &= \mu\left(\frac{\text{diam}_s(C)}{4R}\right). \end{aligned}$$

□

Für einen Beweis der nächsten Bemerkung sei der Leser auf [20, Kapitel II, Paragraph 2.3] verwiesen.

Bemerkung 2.7.14 Es existiert ein $L \in (0, \frac{1}{2})$ mit

$$\mu(r) < \log\left(\frac{4}{r}\right)$$

für alle $r < L$.

2.8 Quasischeiben, John-, Hölder- und integrierbare Gebiete

In diesem Teil stellen wir verschiedene Typen von Gebieten vor. Hierbei ist für uns besonders das John-Gebiet interessant. Neben den Definitionen stellen wir auch einige wichtige Eigenschaften dieser Typen zusammen und betrachten darüber hinaus die Verflechtung der verschiedenen Typen untereinander. Das Hölder-Gebiet und das integrierbare Gebiet sind für diese Arbeit nicht von entscheidender Bedeutung, sie dienen dazu, die Resultate dieser Arbeit zu verallgemeinern und gegen andere ähnliche Resultate abzugrenzen.

Definition 2.8.1 (John-Gebiet) Ein Gebiet $\Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ist ein ε -John-Gebiet, wenn es ein $z_0 \in \Omega$ gibt, sodass für alle $z_1 \in \Omega$ ein Weg $\gamma_{z_1} \subseteq \Omega$ existiert, der z_1 mit z_0 verbindet, und für alle $z \in \gamma_{z_1}$

$$\delta(z, \partial\Omega) \geq \varepsilon \delta(z, z_1)$$

gilt. z_0 wird auch als *John-Zentrum*, ε auch als *John-Konstante* und einfach zusammenhängende John-Gebiete werden auch als *John-Scheiben* bezeichnet.

Für mehr Informationen zu John-Gebieten siehe auch [17], [18], [25] und [26].

Bemerkung 2.8.2 Für die John-Konstante ε gilt insbesondere immer $\varepsilon \leq 1$.

Beweis: Angenommen $\varepsilon > 1$, dann existiert ein $\alpha > 0$ mit $\varepsilon = 1 + \alpha$. Sei $a \in \partial\Omega$ mit $\delta(z_0, a) = \delta(z_0, \partial\Omega)$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $z_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$. Dann gilt auch $\delta(z_n, z_0) \rightarrow \delta(z_0, \partial\Omega)$ für $n \rightarrow \infty$. Somit existiert ein $m > 0$, sodass für alle $n > m$

$$\delta(z_0, \partial\Omega) - \delta(z_0, z_n) < \alpha \delta(z_0, z_n)$$

gilt. Ebenso gilt aber nach der Definition des John-Gebiets für alle $n > m$

$$\delta(z_0, \partial\Omega) \geq (1 + \alpha)\delta(z_0, z_n).$$

Daraus folgt

$$\alpha \delta(z_0, z_n) \leq \delta(z_0, \partial\Omega) - \delta(z_0, z_n) < \alpha \delta(z_0, z_n),$$

das ist ein Widerspruch. □

Lemma 2.8.3 Sei $\Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ein Gebiet. Existiert ein wegzusammenhängendes Kontinuum $K \subseteq \Omega$ und ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $z_1 \in \Omega$ ein Weg $\gamma_{z_1} \subseteq \Omega$ existiert, der z_1 mit K verbindet, und für alle $z \in \gamma_{z_1}$

$$\delta(z, \partial\Omega) \geq \varepsilon \delta(z, z_1)$$

gilt, so ist Ω ein ε' -John-Gebiet, wobei ε' von K und ε abhängt.

Beweis: Da K kompakt ist, existiert

$$d := \min_{z \in K} \delta(z, \partial\Omega).$$

Setze $\varepsilon' := \min\{\varepsilon, \frac{d}{\pi}\}$. Dann gilt die Definition für John-Gebiete mit ε' . Sei dazu $z_0 \in K$. Für alle $z_1 \in \Omega$ existiert nach Voraussetzung ein Weg $\gamma \subseteq \Omega$, der z_1 mit K verbindet, für $z_1 \in K$ wähle einfach den konstanten Weg $\gamma \equiv z_1$. Verbinde den Endpunkt von γ über einen Weg $\gamma' \subseteq K$ mit z_0 . Setze $\gamma_{z_1} = \gamma \cdot \gamma'$. Dann gilt für $z \in \gamma$

$$\varepsilon' \delta(z, z_1) \leq \varepsilon \delta(z, z_1) \leq \delta(z, \partial\Omega)$$

und für $z \in \gamma'$ gilt

$$\varepsilon' \delta(z, z_1) \leq \frac{d}{\pi} \delta(z, z_1) \leq d \leq \delta(z, \partial\Omega).$$

Demnach gilt für alle $z \in \gamma_{z_1}$

$$\varepsilon' \delta(z, z_1) \leq \delta(z, \partial\Omega).$$

□

Bemerkung 2.8.4 Die letzte Bemerkung zeigt, dass die John-Gebiet-Eigenschaft auch als lokale Eigenschaft aufgefasst werden kann. Es reicht also, wenn die John-Gebiet-Eigenschaft nur lokal in einer Umgebung des Randes erfüllt ist.

Bemerkung 2.8.5 Bilder von John-Gebieten unter konformen Abbildungen sind im Allgemeinen keine John-Gebiete mehr. Denn nach dem Riemannschen Abbildungssatz existiert für jedes beliebige einfach zusammenhängende Gebiet eine konforme Abbildung, die die Einheitskreisscheibe auf dieses Gebiet abbildet. Möbiustransformationen erhalten hingegen zwar John-Gebiete, allerdings kann die John-Konstante beliebig schlechter werden (siehe [25, Bemerkung 2.12.3]).

Definition 2.8.6 (Querschnitt) Sei U ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $a, b \in \overline{\mathbb{C}}$. $[a, b]$ bezeichne das Teilstück einer sphärischen Geodätischen, die a mit b verbindet. Wir sagen $[a, b]$ ist ein *Querschnitt von U* , wenn $[a, b] \cap \partial U = \{a, b\}$ und $[a, b] \subseteq \overline{U}$ gilt.

Definition 2.8.7 (Quasikreis) Sei γ eine Jordankurve und $D > 1$. γ heißt dann *D -Quasikreis*, wenn für alle $x, y \in \gamma$, die Teilkurve γ' von γ , die x mit y verbindet und den kleineren Durchmesser besitzt, folgende Eigenschaft hat:

$$\text{diam}_s \gamma \leq D \text{dist}_s(x, y).$$

Definition 2.8.8 (Quasischeibe) Ein einfach zusammenhängendes Gebiet, dessen Rand ein Quasikreis ist, heißt *Quasischeibe*.

Für mehr Informationen zu Quasischeiben siehe auch [12].
Das folgende Lemma wurde in [26, Theorem 5.9] bewiesen.

Lemma 2.8.9 *Jede Quasischeibe ist auch eine John-Scheibe.*

Definition 2.8.10 Sei $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ein Gebiet. Dann sind alle Komponenten von $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{U}$ einfach zusammenhängend. Gilt $\text{diam}_s U \leq 1$, so gibt es nur eine Komponente V von $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{U}$ mit $\text{diam}_s V > 1$. Diese bezeichnen wir mit $\text{ext}(U)$. Weiter definieren wir $\text{fill}(U)$ durch $\text{fill}(U) := \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\text{ext}(U)}$. Damit ist $\text{fill}(U)$ einfach zusammenhängend und es gilt $\text{diam}_s U = \text{diam}_s(\text{fill}(U))$.

Definition 2.8.11 Seien $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, z_0 ein Häufungspunkt in U und $a : U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b : U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ Abbildungen. Dann schreiben wir

$$a(z) \sim b(z) \text{ für } z \rightarrow z_0,$$

wenn

$$\frac{a(z)}{b(z)} \rightarrow 1 \text{ für } z \rightarrow z_0$$

gilt.

Definition 2.8.12 Seien $A(\cdot)$ und $B(\cdot)$ zwei reellwertige Abbildungen. Wir schreiben

$$A(\cdot) \lesssim B(\cdot),$$

wenn es Konstanten $C_0 > 0$ und $C_1 > 0$ gibt mit

$$A(\cdot) \leq C_1 B(\cdot) + C_0.$$

Außerdem schreiben wir $A(\cdot) \approx B(\cdot)$, wenn $A(\cdot) \lesssim B(\cdot)$ und $B(\cdot) \lesssim A(\cdot)$ gilt.

Definition 2.8.13 (Hölder-Gebiet) Ein Gebiet $\Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ist ein *Hölder-Gebiet*, wenn ein $z_0 \in \Omega$ existiert, sodass für alle $z \in \Omega$

$$\text{dist}_{qh}(z, z_0) \lesssim -\log \delta(z, \partial\Omega)$$

gilt.

Bemerkung 2.8.14 Hier reicht es, wie auch schon beim John-Gebiet, wenn ein Kontinuum $K \subseteq \Omega$ existiert, sodass für alle $z \in \Omega$

$$\text{dist}_{qh}(z, K) \lesssim -\log \delta(z, \partial\Omega)$$

gilt. Daher kann man auch die Hölder-Gebiet-Eigenschaft als lokale Eigenschaft auffassen.

Beweis: Sei $z \in \Omega \setminus K$ und seien C_1 und C_0 so gewählt, dass

$$\text{dist}_{qh}(z, K) \leq C_1 \cdot (-\log \delta(z, \partial\Omega)) + C_0$$

gilt. Setze $d := \text{diam}_{qh} K$, dann gilt für ein beliebiges $z_0 \in K$

$$\text{dist}_{qh}(z, z_0) \leq C_1 \cdot (-\log \delta(z, \partial\Omega)) + C_0 + d.$$

□

Für einen Beweis des folgenden Lemmas siehe [16, Lemma 6]. Da wir in dem Zusammenhang, in dem wir dieses Lemma verwenden, nur brauchen, dass die Riemann-Abbildung auf jedem Hölder-Gebiet stetig auf den Rand fortgesetzt werden kann und jede hölderstetige Abbildung insbesondere stetig ist, gehen wir hier auf hölderstetige Abbildungen nicht weiter ein. Für mehr Informationen zu hölderstetigen Abbildungen sei der Leser auf [16] verwiesen.

Lemma 2.8.15 *Ist Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so ist Ω genau dann ein Hölder-Gebiet, wenn sich die Riemann-Abbildung $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ zu einer hölderstetigen Abbildung auf die abgeschlossene Einheitskreisscheibe fortsetzen lässt.*

Der folgende Satz liefert eine ähnliche Aussage wie Theorem 2 für ExpShrink und Hölder-Gebiete. Die Aussage des Satzes folgt aus [16, Proposition 3] und [27, Seite 49, Main Theorem + Complement of the Main Theorem].

Satz 2.8.16 (ExpShrink und Hölder) *Sei f eine rationale Funktion mit Grad mindestens zwei. Wenn f ExpShrink erfüllt, dann sind alle Komponenten der Fatoumenge Hölder-Gebiete. Wenn f eine vollkommen invariante, attraktive Fatoukomponente besitzt, die ein Hölder-Gebiet ist, dann erfüllt f ExpShrink.*

Definition 2.8.17 (Integrierbares Gebiet) Ein Gebiet $\Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ heißt *integrierbares Gebiet*, wenn ein $z_0 \in \Omega$ und eine integrierbare Funktion $H : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit

$$\int_0^\infty H(r) dr < \infty$$

existieren, sodass Ω die *Quasi-hyperbolic-Boundary-Bedingung* erfüllt, das heißt für alle $z \in \Omega$ gilt:

$$\delta(z, \partial\Omega) \leq H(\text{dist}_{qh}(z, z_0)).$$

Bemerkung 2.8.18 Jedes John-Gebiet ist ein Hölder-Gebiet und jedes Hölder-Gebiet ist ein integrierbares Gebiet.

Beweis: Die erste Implikation wurde für den Fall eines einfach zusammenhängenden Gebiets in [26, Korollar 5.3] bewiesen. Nach den Bemerkungen zu den jeweiligen Definitionen kann man sowohl die Hölder-Gebiet- als auch die John-Gebiet-Eigenschaft als lokale Eigenschaft in der Nähe des Randes auffassen. Damit spielt mehrfacher Zusammenhang keine Rolle, das heißt, jedes John-Gebiet ist bereits ein Hölder-Gebiet.

Sei nun $\Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ein Hölder-Gebiet, dann existieren $C_0, C_1 > 0$ und $z_0 \in \Omega$, sodass für alle $z \in \Omega$

$$\text{dist}_{qh}(z, z_0) \leq C_0 - C_1 \log \delta(z, \partial\Omega)$$

gilt. Mit $H(r) := \exp(\frac{C_0}{C_1} - \frac{1}{C_1}r)$ ist Ω dann ein integrierbares Gebiet. \square

2.9 Lokaler Zusammenhang

In diesem Abschnitt stellen wir einige Aussagen über lokal zusammenhängende Mengen zusammen. Wir benötigen diese, um später zu zeigen, dass die Julia-Menge unter bestimmten Voraussetzungen lokal zusammenhängend ist. Zentral ist für uns hierbei der Satz von Carathéodory. Für mehr Informationen zu lokalem Zusammenhang und topologischer Analysis siehe [7], [24] und [29].

Definition 2.9.1 (Lokaler Zusammenhang) Eine abgeschlossene Menge $A \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ heißt *lokal zusammenhängend*, wenn für alle $\tau > 0$ ein $\theta > 0$ existiert, sodass für alle zwei Punkte $a, b \in A$ mit $\delta(a, b) < \theta$ ein Kontinuum $B \subseteq A$ gefunden werden kann mit

$$a, b \in B, \text{diam}_s B < \tau.$$

Der folgende Satz ist von grundlegender Bedeutung in der Theorie der konformen Abbildungen, einen Beweis findet man in [7, Theorem 2.1].

Satz 2.9.2 (Satz von Carathéodory) *Es sei $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit mindestens zwei Randpunkten. Dann besitzt die Riemann-Abbildung $f : \mathbb{D} \rightarrow U$ genau dann eine stetige Fortsetzung auf $\partial\mathbb{D}$, wenn ∂U lokal zusammenhängend ist.*

Lemma 2.9.3 *Das Bild einer kompakten lokal zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung ist ebenfalls kompakt und lokal zusammenhängend.*

Für einen Beweis dieser Aussage siehe [24, Lemma 17.15].

Bemerkung 2.9.4 Jede Jordankurve und jeder Jordanbogen ist damit lokal zusammenhängend.

Das folgende Lemma folgt aus [15, Lemma 11.5 + Fact 11.1].

Lemma 2.9.5 *Jede Komponente des Randes eines integrierbaren Gebietes ist lokal zusammenhängend.*

Wie bereits erwähnt, sind integrierbare Gebiete kein zentrales Thema dieser Arbeit. Wir benötigen jedoch das folgende Lemma zur Verallgemeinerung von Theorem 3, welches aus [15, Lemma 11.1] und dem Satz von Koebe folgt.

Lemma 2.9.6 *Für SumShrink-Funktionen ist jede periodische attraktive Fatoukomponente ein integrierbares Gebiet, somit ist jede Komponente des Randes einer attraktiven Fatoukomponente lokal zusammenhängend.*

Kapitel 3

Wichtige Hilfsmittel

In diesem Kapitel stellen wir einiges an Handwerkszeug bereit, welches uns bei den Beweisen unserer Hauptresultate helfen wird. Neben technischen Resultaten stellen wir auch allgemein formulierte Lemmata vor.

3.1 Hilfsmittel aus der Funktionentheorie

Da wir den Satz von Koebe auch auf der Sphäre anwenden wollen, brauchen wir eine entsprechende Version des Satzes in sphärischer Metrik. Der folgende Satz liefert das Gewünschte. Die Beweisidee des Satzes stammt aus [2] und wurde hier für unsere Belange angepasst.

Satz 3.1.1 (Koebescher Verzerrungssatz auf der Sphäre) *Seien $0 < r_1, r_2 < \text{diam}_s(\overline{\mathbb{C}})$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von r_1 und r_2 abhängt, sodass für alle $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ und jede univalente Abbildung $f : B_s(z_0, r) \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ mit $r < r_1$ und $\text{diam}_s(\overline{\mathbb{C}} \setminus f(B_s(z_0, r))) > r_2$ Folgendes gilt: Ist $z \in \partial B_s(z_0, \varrho r)$ für ein $0 < \varrho < 1$, so gilt*

$$\frac{\varrho}{C} \leq \frac{\delta(f(z), f(z_0))}{r \cdot f^*(z_0)} \leq \frac{C\varrho}{(1-\varrho)^2},$$

$$\frac{1-\varrho}{C} \leq \frac{f^*(z)}{f^*(z_0)} \leq \frac{C}{(1-\varrho)^3}$$

und

$$f(B_s(z_0, r)) \supseteq B_s(f(z_0), C^{-1} \cdot r f^*(z_0)).$$

Beweis: Wir bezeichnen mit c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 Konstanten, die nur von r_1 und r_2 abhängen. Sei $z_1 \in B_s(z_0, \varrho r)$. Sei φ eine Isometrie auf $\overline{\mathbb{C}}$ bezüglich der sphärischen Metrik, also eine Rotation der Sphäre, sodass $\varphi(z_0) = 0$ gilt. Dann gilt $\varphi(B_s(z_0, r)) = B_s(0, r) = B_e(0, s)$ und $\varphi(z_1) \in B_s(0, \varrho r) = B_e(0, s')$ für $s' < s < c_1$, sodass

$$1 - \frac{s'}{s} \geq c_2(1 - \varrho), \quad c_3^{-1}s \leq r \leq c_3s \quad \text{und} \quad c_4^{-1}\varrho \leq \frac{s'}{s} \leq c_4\varrho$$

gilt. Nach Voraussetzung existiert ein Punkt $w \in \overline{\mathbb{C}} \setminus f(B_s(z_0, r))$, sodass $\delta(f(z_1), w) > \frac{r_2}{4}$ und $\delta(f(z_0), w) > \frac{r_2}{4}$ gilt. Wähle eine andere sphärische Isometrie ψ mit $\psi(w) = \infty$. Dann gilt $|\psi(f(z_1))| < c_5$ und $|\psi(f(z_0))| < c_5$. Definiere nun $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ auf $B_e(0, s)$. Damit ist \tilde{f} eine univalente Abbildung auf \mathbb{C} . Mit Lemma 2.1.13 folgt nun

$$\frac{f^*(z_1)}{f^*(z_0)} = \frac{\psi^*(f(\varphi^{-1}(\varphi(z_1)))) \cdot f^*(\varphi^{-1}(\varphi(z_1))) \cdot (\varphi^{-1})^*(\varphi(z_1))}{\psi^*(f(\varphi^{-1}(\varphi(z_0)))) \cdot f^*(\varphi^{-1}(\varphi(z_0))) \cdot (\varphi^{-1})^*(\varphi(z_0))} = \frac{\tilde{f}^*(\varphi(z_1))}{\tilde{f}^*(\varphi(z_0))} = \frac{|\tilde{f}^*(\varphi(z_1))|}{|\tilde{f}^*(\varphi(z_0))|}.$$

Daraus folgt

$$\frac{f^*(z_1)}{f^*(z_0)} = \frac{|\tilde{f}^*(\varphi(z_1))|}{|\tilde{f}^*(\varphi(z_0))|} = \frac{(1 + |\varphi(z_1)|^2)(1 + |\psi(f(z_0))|^2)|\tilde{f}'(\varphi(z_1))|}{(1 + |\varphi(z_0)|^2)(1 + |\psi(f(z_1))|^2)|\tilde{f}'(\varphi(z_0))|}.$$

Mit dem klassischen Satz von Koebe (Satz 2.2.4) für \tilde{f} folgt daraus

$$\frac{f^*(z_1)}{f^*(z_0)} \leq (1 + c_1^2)(1 + c_5^2) \frac{1 + \frac{s'}{s}}{(1 - \frac{s'}{s})^3} \leq \frac{2(1 + c_1^2)(1 + c_5^2)}{c_2^3(1 - \varrho)^3}$$

und

$$\frac{f^*(z_1)}{f^*(z_0)} \geq \frac{1}{(1+c_5^2)} \frac{1-\frac{s'}{s}}{(1+\frac{s'}{s})^3} \geq \frac{c_2(1-\varrho)}{8(1+c_5^2)}.$$

Weiter gilt

$$\frac{\delta(f(z_1), f(z_0))}{rf^*(z_0)} = \frac{\delta(\tilde{f}(\varphi(z_1)), \tilde{f}(\varphi(z_0)))}{r|\tilde{f}'(\varphi(z_0))|} = \frac{(1+|\tilde{f}(\varphi(z_0))|^2)\delta(\tilde{f}(\varphi(z_1)), \tilde{f}(\varphi(z_0)))}{r(1+|\varphi(z_0)|^2)|\tilde{f}'(\varphi(z_0))|}.$$

Mit der Bemerkung 2.1.11 folgt

$$\begin{aligned} \frac{(1+|\tilde{f}(\varphi(z_0))|^2)\chi(\tilde{f}(\varphi(z_1)), \tilde{f}(\varphi(z_0)))}{r|\tilde{f}'(\varphi(z_0))|} &\leq \frac{\delta(f(z_1), f(z_0))}{r|f^*(z_0)|} \\ &\leq \frac{(1+|\tilde{f}(\varphi(z_0))|^2)\frac{\pi}{2}\chi(\tilde{f}(\varphi(z_1)), \tilde{f}(\varphi(z_0)))}{r|\tilde{f}'(\varphi(z_0))|}. \end{aligned}$$

Daraus folgt wieder mit dem klassischen Satz von Koebe (Satz 2.2.4)

$$\begin{aligned} \frac{\delta(f(z_1), f(z_0))}{rf^*(z_0)} &\leq \frac{(1+|\tilde{f}(\varphi(z_0))|^2)\frac{\pi}{2}2|\tilde{f}(\varphi(z_1)) - \tilde{f}(\varphi(z_0))|}{c_3^{-1}s|\tilde{f}'(\varphi(z_0))|\sqrt{(1+|\tilde{f}(\varphi(z_1))|^2)(1+|\tilde{f}(\varphi(z_0))|^2)}} \\ &\leq \frac{c_3(1+c_5^2)\pi\frac{s'}{s}}{(1-\frac{s'}{s})^2} \\ &\leq \frac{c_3c_4(1+c_5^2)\pi\varrho}{c_2(1-\varrho)^2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\delta(f(z_1), f(z_0))}{rf^*(z_0)} &\geq \frac{(1+|\tilde{f}(\varphi(z_0))|^2)2|\tilde{f}(\varphi(z_1)) - \tilde{f}(\varphi(z_0))|}{c_3s|\tilde{f}'(\varphi(z_0))|\sqrt{(1+|\tilde{f}(\varphi(z_1))|^2)(1+|\tilde{f}(\varphi(z_0))|^2)}} \\ &\geq \frac{2\frac{s'}{s}}{c_3(1+c_5^2)(1+\frac{s'}{s})^2} \\ &\geq \frac{\varrho}{2c_3c_4(1+c_5^2)}. \end{aligned}$$

Wähle nun $C := \max\{\frac{2(1+c_1^2)(1+c_5^2)}{c_3^2}, \frac{8(1+c_5^2)}{c_2}, \frac{c_3c_4(1+c_5^2)\pi}{c_2}, 2c_3c_4(1+c_5^2)\}$.

Damit gelten die ersten beiden Aussagen, die dritte folgt aus der ersten für $\varrho \rightarrow 1$. \square

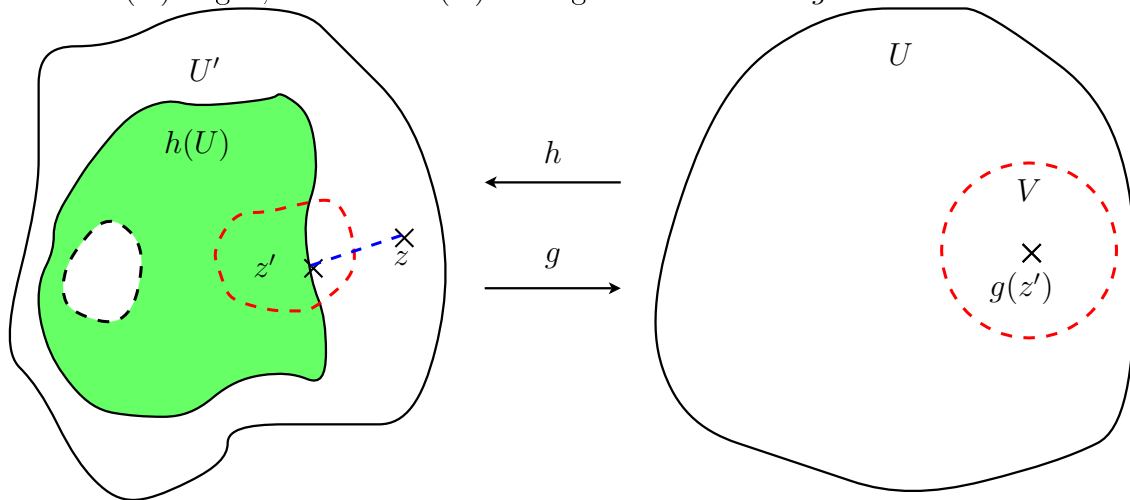
Bemerkung 3.1.2 Existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $r_1 \leq \pi - \varepsilon$ und $r_2 \geq \varepsilon$, so kann die Konstante C auch nur in Abhängigkeit von ε gewählt werden. Dies folgt aus dem Beweis.

Das folgende Lemma ist eine Folgerung aus dem Monodromiesatz. Wir werden es mehrfach benötigen um Aussagen über Fatoukomponenten zu gewinnen.

Lemma 3.1.3 (Korollar aus dem Monodromiesatz) *Sei g eine rationale Abbildung, $U \subset \bar{\mathbb{C}}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und U' eine Komponente von $g^{-1}(U)$. Hat g keine kritischen Punkte in U' , so ist g univalent auf U' und U' ist einfach zusammenhängend.*

Beweis: Wir können annehmen, dass $U, U' \subseteq \mathbb{C}$ gilt. Sonst seien $\varphi, \psi : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ Rotationsabbildungen der Sphäre mit $\varphi(U') \subseteq \mathbb{C}$ und $\psi(U) \subseteq \mathbb{C}$. Betrachte $\tilde{f} := \psi \circ g \circ \varphi^{-1}$, dann ist $\tilde{f} : \varphi(U') \rightarrow \psi(U)$ eine holomorphe Abbildung.

g hat keine kritischen Punkte in U' . Damit existiert lokal eine Umkehrfunktion h und nach dem Monodromiesatz lässt sich diese auf ganz U eindeutig fortsetzen. Angenommen $h(U) \neq U'$, dann existiert $z \in U' \setminus h(U)$. Damit existiert ein $z' \in U' \cap \partial h(U)$. Es gilt $g(z') \in U$, das heißt, es existiert eine Umgebung V von $g(z')$, auf der sich g umkehren lässt. Diese Umkehrfunktion muss mit h übereinstimmen, damit kann aber z' nicht im Rand von $h(U)$ liegen, also muss $h(U) = U'$ gelten. Damit ist g univalent auf U' .



Mit den Bezeichnungen aus der Riemann-Hurwitz-Formel gilt dann,

$$\begin{aligned} r &= 0, \text{ da } U' \text{ keine kritischen Punkte enthält,} \\ n &= 1, \text{ da } U \text{ einfach zusammenhängend ist, und} \\ k &= 1, \text{ da } g \text{ injektiv auf } U' \text{ ist.} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} m &= k(n - 2) + r + 2 \\ &= 1(1 - 2) + 0 + 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Damit ist U' einfach zusammenhängend. □

3.2 Lemmata für die quasi-hyperbolische Länge und die hyperbolische Metrik

Die folgenden Lemmata sind sehr technisch, werden uns aber später besonders beim Beweis von Theorem 2 wichtige Hilfsmittel sein.

Lemma 3.2.1 (Verhalten der quasi-hyperbolischen Länge unter univalenten Pullbacks)
Seien $0 < r_1, r_2 < \text{diam}_s \overline{\mathbb{C}}$, $\Omega, \Omega' \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ Gebiete und sei $f : \Omega' \rightarrow \Omega$ eine rationale Abbildung. Sei $\gamma \subseteq \Omega$ ein Weg und $\gamma' \subseteq \Omega'$ ein Pullback von γ , das heißt eine Komponente von $f^{-l}(\gamma)$ für ein $l > 0$. Ist der Zweig von f^{-l} , der γ auf γ' abbildet, univalent auf $B_s(z, \delta(z, \partial\Omega))$ für alle $z \in \gamma$ und gilt $\delta(z, \partial\Omega) < r_1$ sowie $\text{diam}_s(\overline{\mathbb{C}} \setminus f^{-l}(B_s(z, \delta(z, \partial\Omega)))) > r_2$ für alle $z \in \gamma$, so gilt

$$l_{qh}(\gamma') \leq K \cdot l_{qh}(\gamma)$$

für eine Konstante $K > 0$, die nur von r_1, r_2 abhängt.

Beweis: Angenommen, die Aussage gilt lokal. Dann lassen sich die Umgebungen, auf denen die Aussage lokal gilt, auf endlich viele einschränken, da γ kompakt ist. Damit existieren $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\gamma = \gamma_1 \cdot \dots \cdot \gamma_n$. Ebenso existieren dann die Pullbacks $\gamma'_1, \dots, \gamma'_n$ mit $\gamma' = \gamma'_1 \cdot \dots \cdot \gamma'_n$. Somit gilt

$$l_{qh}(\gamma') = l_{qh}(\gamma'_1) + \dots + l_{qh}(\gamma'_n) \leq K \cdot l_{qh}(\gamma_1) + \dots + K \cdot l_{qh}(\gamma_n) \leq K \cdot l_{qh}(\gamma).$$

Es bleibt also zu zeigen, dass die Aussage lokal gilt.

Wir können daher annehmen, dass $\gamma \subset B_s(z_0, \varrho \delta(z_0, \partial\Omega))$ für ein $0 < \varrho < 1$ und ein $z_0 \in \gamma$ gilt. Sei g der lokale Zweig von f^{-l} , der γ auf γ' abbildet. Sei $z \in \gamma$, dann gilt:

$$l_{qh}(\gamma') = l_{qh}(g(\gamma)) = \int_{g \circ \gamma} \frac{1}{\delta(z, \partial\Omega)} |d\sigma(z)| = \int_{\gamma} \frac{g^*(z)}{\delta(g(z), \partial\Omega')} |d\sigma(z)|$$

Für $g^*(z)$ existiert nach dem Satz von Koebe auf der Sphäre (Satz 3.1.1) ein $C > 0$ mit

$$g^*(z) \leq \frac{C}{(1 - \varrho)^3} g^*(z_0). \quad (3.2.1)$$

Wegen

$$g(B_s(z_0, \delta(z_0, \partial\Omega))) \supseteq B_s(g(z_0), \frac{1}{C} \delta(z_0, \partial\Omega) g^*(z_0))$$

gilt mit dem Satz von Koebe (Satz 3.1.1)

$$\delta(z_0, \partial\Omega) \geq \frac{1}{C} \delta(z_0, \partial\Omega) g^*(z_0). \quad (3.2.2)$$

Außerdem liefert Satz 3.1.1

$$\delta(g(z), g(z_0)) \leq \delta(z_0, \partial\Omega) g^*(z_0) \frac{C\varrho}{(1-\varrho)^2}. \quad (3.2.3)$$

Verkleinere wenn nötig ϱ , sodass $\frac{1}{C} - \frac{C\varrho}{(1-\varrho)^2} > 0$ gilt. Aus den Ungleichungen (3.2.2), (3.2.3) und dem Satz 3.1.1 folgt:

$$\begin{aligned} \delta(g(z), \partial\Omega') &\geq \delta(g(z_0), \partial\Omega') - \delta(g(z), g(z_0)) \\ &\geq \frac{1}{C} \delta(z_0, \partial\Omega) g^*(z_0) - \delta(z_0, \partial\Omega) g^*(z_0) \frac{C\varrho}{(1-\varrho)^2} \\ &= \delta(z_0, \partial\Omega) g^*(z_0) \left(\frac{1}{C} - \frac{C\varrho}{(1-\varrho)^2} \right). \end{aligned}$$

Damit und mit Ungleichung (3.2.1) folgt:

$$\frac{g^*(z)}{\delta(g(z), \partial\Omega')} \leq \frac{\frac{C}{(1-\varrho)^3} g^*(z_0)}{\delta(z_0, \partial\Omega) g^*(z_0) \left(\frac{1}{C} - \frac{C\varrho}{(1-\varrho)^2} \right)} = \frac{C}{\delta(z_0, \partial\Omega) \left(\frac{1}{C} - \frac{C\varrho}{(1-\varrho)^2} \right) (1-\varrho)^3}$$

Außerdem gilt

$$\delta(z, \partial\Omega) \leq \delta(z_0, \partial\Omega) + \delta(z, z_0) \leq (1+\varrho)\delta(z_0, \partial\Omega),$$

da $z \in B_s(z_0, \varrho\delta(z_0, \partial\Omega))$ gilt. Also folgt

$$\frac{1}{\delta(z_0, \partial\Omega)} \leq \frac{1+\varrho}{\delta(z, \partial\Omega)}.$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$\begin{aligned} l_{qh}(\gamma') &= \int_{\gamma} \frac{g^*(z)}{\delta(g(z), \partial\Omega')} |d\sigma(z)| \\ &\leq \int_{\gamma} \frac{C}{\delta(z_0, \partial\Omega) \left(\frac{1}{C} - \frac{C\varrho}{(1-\varrho)^2} \right) (1-\varrho)^3} |d\sigma(z)| \\ &\leq \int_{\gamma} \frac{C(1+\varrho)}{\delta(z, \partial\Omega) \left(\frac{1}{C} - \frac{C\varrho}{(1-\varrho)^2} \right) (1-\varrho)^3} |d\sigma(z)| \\ &\leq K \int_{\gamma} \frac{1}{\delta(z, \partial\Omega)} |d\sigma(z)| \\ &= K \cdot l_{qh}(\gamma), \end{aligned}$$

$$\text{für } K := \frac{C(1+\varrho)}{\left(\frac{1}{C} - \frac{C\varrho}{(1-\varrho)^2} \right) (1-\varrho)^3}.$$

□

Bemerkung 3.2.2 Hier gilt ebenfalls: Existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $r_1 \leq \pi - \varepsilon$ und $r_2 \geq \varepsilon$, so kann die Konstante K auch nur in Abhängigkeit von ε gewählt werden.

Lemma 3.2.3 Sei $D := B_s(0, r')$ für ein $r' \in (0, 1)$. Dann existiert ein $\beta \in (0, 1)$, das nicht von r' abhängt, sodass für alle $0 < \theta \leq \beta/2$ gilt:

$$B_s(0, \beta\theta r') \subseteq \{\zeta \in D : d_D(0, \zeta) < \theta\} \subseteq B_s(0, \beta^{-1}\theta r').$$

Beweis: Die sphärische Metrik δ und die hyperbolische Metrik d_D auf D sind, uniform abhängig von r' , äquivalent auf $B_s(0, r'/2)$. Das heißt, es existiert ein $\beta \in (0, 1)$, sodass für $\zeta \in B_s(0, r'/2)$ gilt:

$$\beta r' d_D(0, \zeta) \leq \delta(0, \zeta) \leq \beta^{-1} r' d_D(0, \zeta)$$

Damit folgt für $0 < \theta \leq \beta/2$

$$B_s(0, \beta\theta r') \subseteq \{\zeta \in D : d_D(0, \zeta) < \theta\} \subseteq B_s(0, \beta^{-1}\theta r').$$

□

3.3 Kontrolle des Moduls

Für die Beweise von allen drei Theoremen werden wir an entscheidenden Stellen den Modul von Ringgebieten kontrollieren müssen. Carleson, Jones und Yoccoz benötigen in [8] derartige Resultate nicht, da sie nur Polynome betrachtet haben. Daher ist dieser Abschnitt von besonderer Bedeutung. Die folgenden Aussagen gehen auf Mihalache ([23]) zurück.

Lemma 3.3.1 (Untere Schranke des Moduls) Sei g eine rationale Abbildung, $z \in \overline{\mathbb{C}}$ und $0 < r < R < 1$. Sei W eine Komponente von $g^{-1}(B_s(z, R))$ und W' eine Komponente von $g^{-1}(B_s(z, r))$ mit $W' \subseteq W$ und $\text{diam}_s W < 1$.

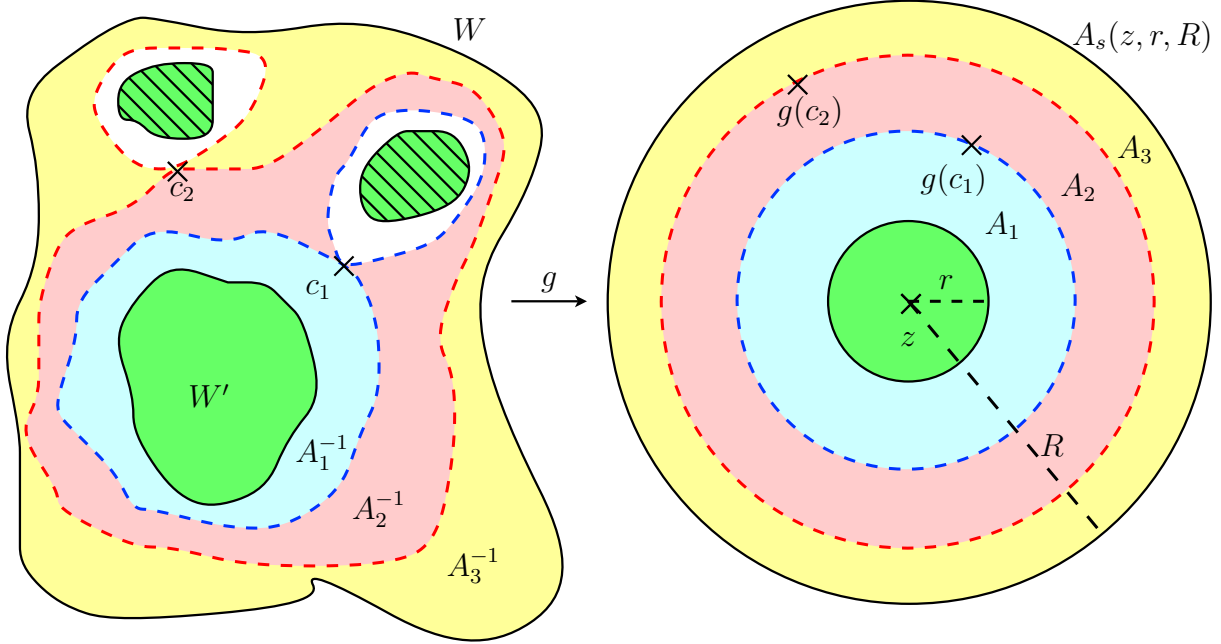
Ist $\deg(g|_W) \leq N$, dann gilt für das Ringgebiet $A' = \text{fill}(W) \setminus \overline{\text{fill}(W')}$

$$\text{mod } A' > \frac{\log(R/r)}{2\pi N}.$$

Beweis: Seien A_1, \dots, A_m disjunkte konzentrische Ringgebiete innerhalb von $A_s(z, r, R)$, die kritische Werte von $g|_W$ vermeiden, das heißt, dass alle kritischen Werte in den Rändern der Ringgebiete liegen. Außerdem gelte $\bigcup_{i=1}^m \overline{A_i} = \overline{A_s(z, r, R)}$. Daraus folgt mit Lemma 2.7.7:

$$\sum_{i=1}^m \text{mod } A_i = \text{mod } A_s(z, r, R). \quad (3.3.1)$$

Sei $A_i^{-1} \subseteq W$ eine Komponente von $g^{-1}(A_i)$, dann ist $g : A_i^{-1} \rightarrow A_i$ eine eigentliche Abbildung für alle $i \in \{1, \dots, m\}$. Damit ist A_i^{-1} zweifach zusammenhängend nach der Riemann-Hurwitz-Formel, da g keine kritischen Punkte in A_i^{-1} besitzt.



Damit gilt mit Lemma 2.7.6:

$$\text{mod } A_i^{-1} = \frac{1}{\deg(g|_{A_i^{-1}})} \text{mod } A_i \geq \frac{1}{\deg(g|_W)} \text{mod } A_i \geq \frac{1}{N} \text{mod } A_i \quad (3.3.2)$$

Für alle $w \in \partial W$ und alle A_i existiert ein $A_i^{-1} \subseteq W$, das W' von w trennt.

Angenommen, ein solches A_i^{-1} existiert nicht. Dann kann W' mit w durch einen Weg $\gamma \subseteq W \setminus g^{-1}(A_i)$ verbunden werden, da W als offene und zusammenhängende Menge wegzusammenhängend ist. $g(\gamma)$ verbindet dann $B_s(z, r)$ mit $\partial B_s(z, R)$ und es gilt $g(\gamma) \cap A_i = \emptyset$. Das ist ein Widerspruch.

Sei A' das Ringgebiet $\text{fill}(W) \setminus \overline{\text{fill}(W')}$ und $w \in \partial \text{fill}(W)$. Für alle $1 \leq i \leq m$ existiert ein A_i^{-1} , das W' von w trennt. Bezeichne dieses mit A'_i . Da $\overline{W'} \cap A'_i = \emptyset$ gilt, werden $\text{fill}(W')$ und w innerhalb von W durch A'_i getrennt. Daher gilt $A'_i \subseteq A'$. Mit den Lemmata 2.7.5 und 2.7.7 sowie den Ungleichungen (3.3.1) und (3.3.2) folgt

$$\text{mod } A' \geq \sum_{i=1}^m \text{mod } A'_i \geq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m \text{mod } A_i = \frac{1}{N} \text{mod } A_s(z, r, R) > \frac{\log(R/r)}{2\pi N}.$$

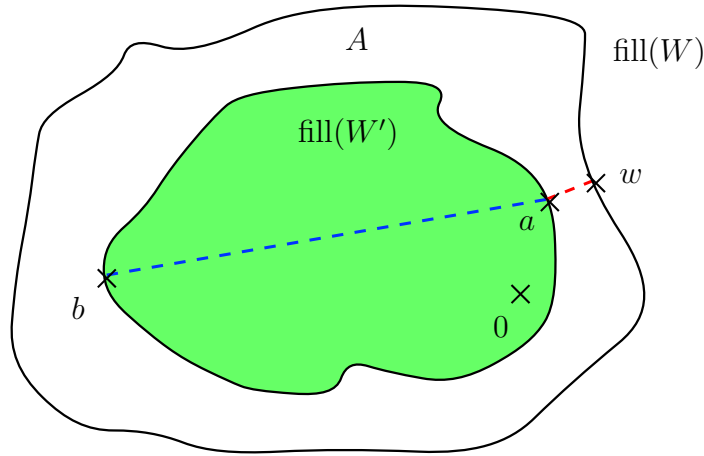
□

Lemma 3.3.2 (Modul-Abschätzung) *Sei g eine rationale Abbildung, $z \in \overline{\mathbb{C}}$ und $0 < r < R < 1$. Sei W eine Komponente von $g^{-1}(B_s(z, R))$ und W' eine Komponente von $g^{-1}(B_s(z, r))$ mit $W' \subseteq W$ und $\text{diam}_s W < 1$.*

Ist $\deg(g|_W) \leq N$, dann gilt

$$\frac{\text{diam}_s W'}{\text{diam}_s W} < 64 \left(\frac{r}{R}\right)^{1/N}.$$

Beweis: Wir können durch Rotation erreichen, dass $0 \in W$ ist und daher $W \subseteq B_s(0, 1)$ gilt, da $\text{diam}_s W < 1$ nach Voraussetzung erfüllt ist. Damit gilt $\infty \notin W$. Sei $a \in \partial \text{fill}(W')$ und $w \in \partial \text{fill}(W)$ mit $|a - w| = \text{dist}_e(\partial \text{fill}(W'), \partial \text{fill}(W))$. Sei außerdem $b \in \partial \text{fill}(W')$ so gewählt, dass $|b - a| = \sup_{x \in \partial \text{fill}(W')} |x - a|$ gilt. Dies ist möglich, da $\partial U'$ kompakt ist.



Die lineare Abbildung $h : z \rightarrow (z - a)/(a - b)$ bildet a auf 0 , b auf -1 , ∞ auf ∞ und w auf $w_0 = (w - a)/(a - b)$ ab.

Sei A das Ringgebiet $\text{fill}(W) \setminus \overline{\text{fill}(W')}$. Dann gilt nach Lemma 3.3.1

$$\text{mod } A > \frac{\log(R/r)}{2\pi N}.$$

Damit erfüllen $h(A)$, a , b , w_0 und ∞ alle Voraussetzungen für den Modulsatz von Teichmüller. Nach Lemma 2.7.6 gilt $\text{mod } A = \text{mod } h(A)$, da $\deg h = 1$. Aus der eben gezeigten Ungleichung und der Ungleichung (2.7.1) folgt

$$\left(\frac{R}{r}\right)^{1/N} < \exp(2\pi \text{mod } A) = \exp(2\pi \text{mod } h(A)) \leq \exp(2\pi \Lambda(|w_0|)) \leq 16(|w_0| + 1).$$

Nach Konstruktion gilt $\frac{1}{2} \text{diam}_e W' \leq |a - b| \leq \text{diam}_e W'$ und damit gilt

$$|w_0| + 1 = \frac{|w - a| + |a - b|}{|a - b|} \leq 2 \frac{\text{diam}_e W}{2|a - b|} \leq 2 \frac{\text{diam}_e W}{\text{diam}_e W'}.$$

Daraus folgt

$$\left(\frac{R}{r}\right)^{1/N} < 32 \frac{\text{diam}_e W}{\text{diam}_e W'}.$$

Mit Bemerkung 2.1.9 folgt

$$\left(\frac{R}{r}\right)^{1/N} < 64 \frac{\text{diam}_s W}{\text{diam}_s W'} \Leftrightarrow \frac{\text{diam}_s W'}{\text{diam}_s W} < 64 \left(\frac{r}{R}\right)^{1/N}.$$

□

Lemma 3.3.3 (Minimale Dicke von Ringgebieten) *Seien $A \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ein Ringgebiet und C_1, C_2 die Komponenten von $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{A}$ mit $\text{diam}_s C_1 \leq \text{diam}_s C_2$. Für alle $\alpha > 0$ existiert ein $C_\alpha > 0$, sodass unter der Bedingung $\text{mod } A \geq \alpha$ gilt:*

$$\text{dist}_s(\overline{\mathbb{C}} \setminus A) \geq C_\alpha \cdot \text{diam}_s C_1$$

Beweis: Seien $a \in \partial C_1$ und $w \in \partial C_2$ mit $\text{dist}_s(a, w) = \text{dist}_s(\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{A})$. Durch Rotation können wir erreichen, dass $a = 0$ gilt. Außerdem können wir annehmen, dass $\text{dist}_s(\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{A}) < \frac{1}{10}$. Denn ist $\text{dist}_s(\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{A}) \geq \frac{1}{10}$, so gilt die Aussage für $C_\alpha := \frac{1}{10\pi}$, da $\text{diam } \overline{\mathbb{C}} = \pi$. Also gilt mit Bemerkung 2.1.9 $|w| \leq \text{dist}_s(0, w) = \text{dist}_s(\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{A}) < \frac{1}{10}$. Es gelte $\text{diam}_s C_1 > 10 \cdot \text{dist}_s(\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{A})$, andernfalls gilt die Aussage mit $C_\alpha := \frac{1}{10}$. Daraus folgt

$$\text{diam}_s C_2 \geq \text{diam}_s C_1 > 10 \cdot \text{dist}_s(\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{A}) = 10 \cdot \text{dist}_s(0, w) \geq 10 \cdot |w|.$$

Dann existiert $u \in C_2$ mit $|u - w| > 5 \cdot |w|$, also

$$|u| > 4 \cdot |w|.$$

Die Möbiustransformation $T : z \mapsto \frac{uz}{u-z}$ bildet 0 auf 0, u auf ∞ und w auf $w' := \frac{uw}{u-w}$ ab. Es gilt

$$|w'| = \frac{|u|}{|u-w|} |w| \leq \frac{1}{1 - \frac{|w|}{|u|}} |w| < \frac{4}{3} |w|.$$

Ist $C_1 \subseteq \mathbb{D}$, dann sei $b \in \partial C_1$ mit $\text{dist}_s(0, b) = \max_{x \in \partial C_1} \text{dist}_s(0, x)$. Ist $C_1 \not\subseteq \mathbb{D}$, dann sei $b \in C_1 \cap \partial \mathbb{D}$. In beiden Fällen können wir wieder durch Rotation erreichen, dass $b \in [-1, 0)$ gilt. Die lineare Abbildung $h : z \mapsto \frac{-z}{b}$ bildet b auf -1 und w' auf $w_0 := \frac{-w'}{b}$ ab und lässt 0 und ∞ fix. Es gilt insbesondere $\text{mod } A = \text{mod } T(A) = \text{mod } h(T(A))$ nach Lemma 2.7.6. Daraus folgt mit dem Modulsatz von Teichmüller (Satz 2.7.11)

$$\alpha \leq \text{mod } A = \text{mod } T(A) = \text{mod } h(T(A)) \leq \Lambda(|w_0|).$$

Außerdem gilt nach Gleichung (2.7.2) $\Lambda(\varepsilon) \rightarrow 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$. Deshalb muss eine untere Schranke $C'_\alpha > 0$ für $|w_0|$ existieren. Folglich gilt

$$C'_\alpha \leq |w_0| = \frac{|w'|}{|b|} \leq \frac{4}{3 \cdot |b|} |w| \leq \frac{4}{3 \cdot |b|} \text{dist}_s(0, w).$$

Ist $|b| < 1$, dann gilt $C_1 \subseteq \mathbb{D}$ und $|b| \geq \text{diam}_e(C_1)/2$. Außerdem gilt nach Bemerkung 2.1.9 $|b| \geq \text{diam}_s(C_1)/4$.

Ist $|b| = 1$, dann gilt $|b| \geq \text{diam}_s(C_1)/\pi$, da $\text{diam } \overline{\mathbb{C}} = \pi$. In beiden Fällen gilt

$$|b| \geq \frac{\text{diam}_s(C_1)}{4}.$$

Wähle $C_\alpha = \frac{3}{16}C'_\alpha$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{dist}_s(\overline{\mathbb{C}} \setminus A) &= \text{dist}_s(0, w) \\ &\geq \frac{3}{4} \cdot C'_\alpha \cdot |b| \\ &\geq \frac{3}{16} \cdot C'_\alpha \cdot \text{diam}_s(C_1) \\ &= C_\alpha \text{diam}_s(C_1). \end{aligned}$$

□

3.4 Eigenschaften von nichtuniform hyperbolischen Abbildungen

Wir wollen hier einige erste Resultate über nichtuniform hyperbolischen Abbildungen beweisen.

Das folgende Lemma ist dabei sehr wichtig, denn es ist der erste Schritt hin zu ExpShrink. Beim Beweis von Theorem 1 werden wir dieses Lemma und eine Teleskopkonstruktion nutzen, um zu zeigen, dass jede semihyperbolische Abbildung ExpShrink erfüllt. Wir beweisen dabei das Lemma nicht in vollem Umfang. Wir werden die Aussage nur für den Fall beweisen, dass für ein genügend kleines $r > 0$ die Komponenten von $f^{-n}(B_s(a, r))$ einfach zusammenhängend sind. Für den Fall, dass die Komponenten mehrfach zusammenhängend sind, verweisen wir auf die Arbeit von Mihalache [23, Proposition 11].

Lemma 3.4.1 (Stabilität von semihyperbolischen Abbildungen) *Sei f eine rationale, semihyperbolische Abbildung. Es existiert ein $s > 0$, sodass für alle $\varepsilon > 0$ ein $M \in \mathbb{N}$ existiert, sodass Folgendes gilt: Für alle $a \in \mathcal{J}$, $n \geq M$ und alle Komponenten U von $f^{-n}(B_s(a, s))$ gilt*

$$\text{diam}_s(U) < \varepsilon.$$

Beweis: Sei $a \in \mathcal{J}$ sowie r und N aus der Definition von semihyperbolisch. Verkleinere wenn nötig r , sodass zwei periodische Punkte $b_1 \in \mathbb{C}$ und $b_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ existieren, für die $\delta(f^n(b_i), a) > r$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, 2\}$ gilt. Wende Möbiustransformationen an, um

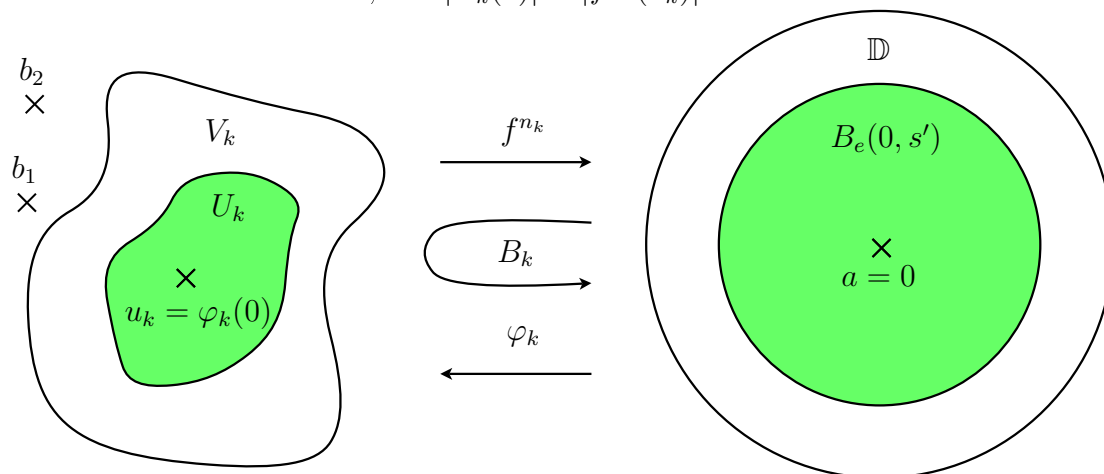
b_2 auf ∞ und a auf 0 abzubilden. Dann existiert ein $0 < r' \leq r$, sodass f semihyperbolisch in 0 ist, mit den Parametern r' und N . Durch Anwenden einer Möbiustransformation können wir erreichen, dass $r' = \frac{\pi}{2}$ gilt, woraus $B_s(a, r') = \mathbb{D}$ folgt.

Auf Grund der vor dem Beweis gemachten Voraussetzung können wir annehmen, dass für alle Komponenten U von $f^{-n}(B_s(0, s))$ die Komponente V von $f^{-n}(\mathbb{D})$, die U enthält, einfach zusammenhängend ist.

Wir stellen fest: Ist V einfach zusammenhängend, so ist U ebenfalls einfach zusammenhängend nach Maximumprinzip.

Angenommen ein solches s wie behauptet existiert nicht. Sei $0 < s' < 1$, sodass $B_s(0, s) = B_e(0, s')$ gilt. Wir betrachten im Folgenden $B_e(0, s')$ anstelle von $B_s(0, s)$.

Nach Annahme existieren $\varepsilon > 0$, eine Folge natürlicher Zahlen $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und einfach zusammenhängende Komponenten U_k von $f^{-n_k}(B_e(0, s'))$, sodass $\text{diam}_s(U_k) \geq \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Daraus folgt, dass ein $R > 0$ mit $B_e(0, R) \cap U_k \neq \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert. Sei also $u_k \in B_e(0, R) \cap U_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei V_k die Komponente von $f^{-n_k}(\mathbb{D})$, die U_k enthält. Da V_k nach Voraussetzung einfach zusammenhängend ist, existiert eine konforme Abbildung $\varphi_k : \mathbb{D} \rightarrow V_k$ mit $\varphi_k(0) = u_k$. Dann ist $B_k := f^{n_k} \circ \varphi_k$ ein Blaschke-Produkt vom Grad höchstens N nach Satz 2.3.7, mit $|B_k(0)| = |f^{n_k}(u_k)| < s'$.



Nach der Wahl von b_1 und b_2 gilt $b_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, $b_2 \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$ und $f^n(b_i) \notin \mathbb{D}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, 2\}$. Es folgt, dass $b_1, b_2 \notin V_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, 2\}$. Nach Wahl von b_2 gilt $V_k \subseteq \mathbb{C}$, demnach können wir den euklidischen Satz von Koebe anwenden und erhalten

$$|\varphi'_k(0)| \leq 4|b_1 - u_k| \leq 4(|b_1| + R).$$

Damit gilt für $0 < \varrho < 1$ und alle $z \in B_e(0, \varrho)$ nach dem Satz von Koebe

$$|\varphi_k(z) - u_k| \leq |\varphi'_k(0)| \frac{\varrho}{(1 - \varrho)^2} \leq 4(|b_1| + R) \frac{\varrho}{(1 - \varrho)^2}.$$

Daraus folgt, dass die φ_k lokal beschränkt sind, somit sind sie nach dem Satz von Montel eine normale Familie. Wir können annehmen, notfalls durch Übergang zu einer Teilfolge, dass $\varphi_k \rightarrow \varphi$ für eine meromorphe Funktion $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ gilt und dass $B_k \rightarrow B$ für ein Blaschke-Produkt B mit $|B(0)| \leq s'$ gilt. Es existiert ein $\varrho \in (0, 1)$ mit $|B(z)| > s'$ für $|z| = \varrho$. Ist k groß genug, so folgt daraus, dass $|B_k(z)| > s'$ für $|z| = \varrho$ gilt und somit $\varphi_k^{-1}(U_k) \subseteq B_e(0, \varrho)$ gilt. Mit dem Satz von Koebe folgt einerseits

$$U_k \subseteq \varphi_k(B_e(0, \varrho)) \subseteq B_e\left(u_k, \frac{|\varphi'_k(0)|\varrho}{(1-\varrho)^2}\right).$$

Andererseits gilt wegen $\text{diam}_s(U_k) \geq \varepsilon$ auch $U_k \not\subseteq B_e(u_k, \frac{1}{4}\varepsilon)$. Folglich gilt $|\varphi'_k(0)| \geq \varepsilon(1-\varrho)^2/4\varrho$ und damit $|\varphi'(0)| \geq \varepsilon(1-\varrho)^2/4\varrho$. Insbesondere ist φ nicht konstant und damit univalent nach dem Satz von Hurwitz. Wir folgern, dass $f^{n_k} = B_k \circ \varphi_k^{-1} \rightarrow B \circ \varphi^{-1}$ lokal gleichmäßig auf $\varphi(\mathbb{D})$ gilt.

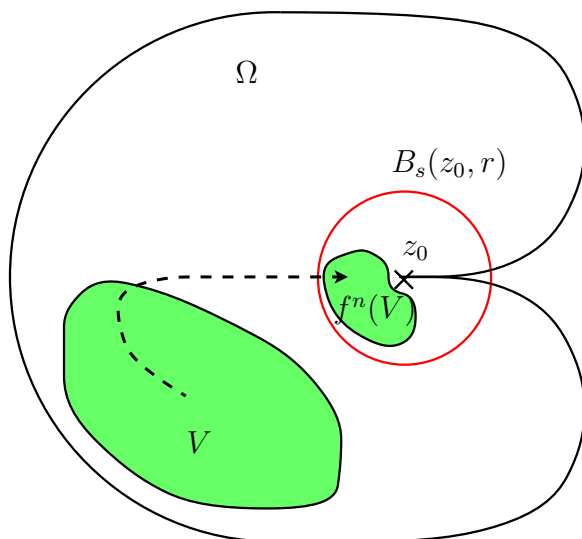
Wir zeigen nun, dass $\varphi(\mathbb{D})$ einen Punkt von \mathcal{J} enthält, was der gleichmäßigen Konvergenz von f^{n_k} auf $\varphi(\mathbb{D})$ widerspricht. Wir wählen $z_k \in U_k$ mit $f^{n_k}(z_k) = 0$. Dann ist $z_k \in \mathcal{J}$, da $0 \in \mathcal{J}$ nach Voraussetzung gilt. Für große k gilt $w_k := \varphi_k^{-1}(z_k) \in B_e(0, \varrho)$. Wir können annehmen, wenn nötig durch Übergang auf eine Teilfolge, dass $w_k \rightarrow w_0 \in \mathbb{D}$ gilt. Dann gilt $z_k = \varphi(w_k) \rightarrow \varphi(w_0) \in \mathcal{J} \cap \varphi(\mathbb{D})$. Dies ist ein Widerspruch.

Die Aussage gilt damit einzeln für alle Punkte aus der Juliamenge. Da die Juliamenge kompakt ist, kann nun ein gemeinsames s und ein gemeinsames M für alle Punkte aus der Juliamenge gewählt werden. \square

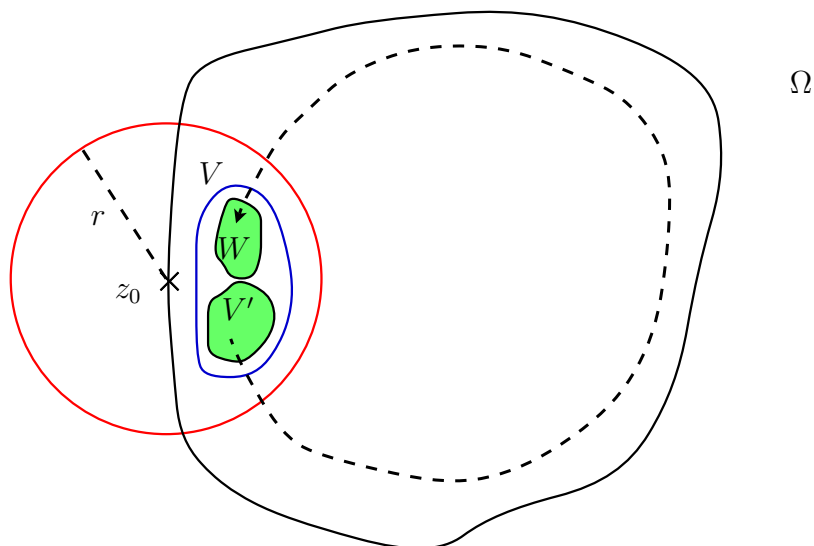
Bemerkung 3.4.2 Nach der Riemann-Hurwitz-Formel (Satz 2.3.5) gilt die Aussage aus dem letzten Satz für alle $0 < r \leq s$.

Lemma 3.4.3 *Die SumShrink-Eigenschaft schließt Rotationsgebiete und parabolische Gebiete aus. Damit hat jede Funktion f , die SumShrink erfüllt, ausschließlich attraktive Fatoukomponenten und deren Urbilder als Fatoukomponenten.*

Beweis: Parabolische Gebiete können nicht auftreten, denn sei Ω ein ohne Beschränkung der Allgemeinheit invariantes, parabolisches Gebiet, dann gilt $f^n|_{\Omega} \rightarrow z_0$ für $n \rightarrow \infty$, für ein $z_0 \in \partial\Omega$. Sei $\varepsilon := \text{diam}_s \Omega$ und $r > 0$ aus der SumShrink-Eigenschaft von f . Aufgrund der SumShrink-Eigenschaft existiert ein $m > 0$, sodass für alle $n > m$ und für alle Komponenten U von $f^{-n}(B_s(z_0, r))$ Folgendes gilt: $\text{diam} U < \varepsilon/2$. Sei $V \subseteq \Omega$ ein Gebiet mit $\overline{V} \subseteq \Omega$ und $\text{diam}_s V > \varepsilon/2$. Dann existiert ein $n > m$, sodass $f^n(V) \subseteq B_s(z_0, r)$ gilt. Also existiert auch umgekehrt eine Komponente U von $f^{-n}(B_s(z_0, r))$ für ein $n > m$, sodass $V \subseteq U$ und damit $\text{diam} U > \varepsilon/2$ gilt. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von m .



Ebenso können Rotationsgebiete nicht auftreten, denn sei Ω ein ohne Beschränkung der Allgemeinheit invariantes Rotationsgebiet, $z_0 \in \partial\Omega$ und $r > 0$ aus der SumShrink-Eigenschaft. Dann existiert ein Gebiet $V \subseteq \Omega \cap B_s(z_0, r)$ mit $\text{diam } V > \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$. Aufgrund der SumShrink-Eigenschaft existiert ein $m > 0$, sodass für alle $n > m$ und für alle Komponenten U von $f^{-n}(B_s(z_0, r))$ Folgendes gilt: $\text{diam}_s U \leq \varepsilon/2$. Sei V' ein Gebiet mit $\overline{V'} \subseteq V$ und $\text{diam}_s V' > \varepsilon/2$. Da Ω ein Rotationsgebiet ist, existiert eine Folge natürlicher Zahlen $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, sodass $f_V^{n_k} \rightarrow \text{id}_V$ für $k \rightarrow \infty$ gilt. Damit existiert ein $n_{k_0} > m$ mit $W := f^{n_{k_0}}(V') \subseteq V \subseteq B_s(z_0, r)$. Somit ist V' aber eine Komponente von $f^{-n_{k_0}}(W)$, für die $\text{diam}_s V' > \varepsilon/2$ gilt, ebenso gilt aber $n_{k_0} > m$, was ein Widerspruch zur Wahl von m ist.



Daraus folgt mit der Klassifikation von periodischen Fatoukomponenten (Satz 2.4.11) und

dem Satz von Sullivan (Satz 2.4.15), dass alle Fatoukomponenten attraktiv oder Urbilder von attraktiven Fatoukomponenten sind. \square

Bemerkung 3.4.4 Sei f eine rationale ExpShrink-Abbildung, dann existiert ein $r_0 > 0$, sodass für alle $0 < r \leq r_0$, $z \in \mathcal{J}$ und $n \in \mathbb{N}$ jede Komponente U von $f^{-n}(B_s(z, r))$ einfach zusammenhängend ist und $\text{diam}_s U < 1$ erfüllt.

Beweis: Sei $0 < r_1 < 1$ kleiner als der minimale Abstand von zwei kritischen Punkten von f . Sei $r_0 > 0$ über die ExpShrink-Bedingung so gewählt, dass für alle $z \in \mathcal{J}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ jede Komponente U von $f^{-n}(B_s(z, r_0))$ Folgendes erfüllt: $\text{diam} U < r_1$.

Seien $0 < r \leq r_0$ und $z \in \mathcal{J}$. Angenommen es existiert eine mehrfach zusammenhängende Komponente U_n von $f^{-n}(B_s(z, r))$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Nach der Riemann-Hurwitz-Formel (Satz 2.3.5) existiert dann mindestens ein $m \leq n$, sodass eine Komponente U_m von $f^{-m}(B_s(z, r))$ existiert, die mindestens zwei kritische Punkte enthält. Dies ist ein Widerspruch zu $\text{diam} U_m < r_1$. \square

3.5 Charakterisierungen von John-Gebieten

An dieser Stelle geben wir mehrere Charakterisierungen für John-Gebiete an, die größtenteils sogar äquivalent zur ursprünglichen Definition sind. Das folgende Lemma zeigt, dass die Definition des John-Gebiets für beschränkte Gebiete in \mathbb{C} äquivalent zur entsprechenden Definition in euklidischer Metrik ist.

Lemma 3.5.1 (John-Gebiete in euklidischer Metrik) *Sei $\Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ein Gebiet mit $B_s(\infty, r) \subseteq \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ für ein $r > 0$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Ω ist ein ε -John-Gebiet.

(ii) Ω ist ein ε' -John-Gebiet bezüglich der euklidischen Metrik, das heißt, es existiert ein $z_0 \in \Omega$, sodass für alle $z_1 \in \Omega$ ein Weg $\gamma_{z_1} \subseteq \Omega$ existiert, der z_1 mit z_0 verbindet, und für alle $z \in \gamma_{z_1}$

$$\text{dist}_e(z, \partial\Omega) \geq \varepsilon' |z - z_1|$$

gilt.

Insbesondere gilt $\varepsilon = C\varepsilon'$ mit einer Konstanten C , die nur von r abhängt.

Beweis: Sei also $z_1 \in \Omega$ und $\gamma_{z_1} \subseteq \Omega$ der Weg aus der John-Gebiet-Definition von Ω , der z_1 mit $z_0 \in \Omega$ verbindet. Da $\overline{\Omega}$ eine kompakte Teilmenge von \mathbb{C} ist, existiert eine Konstante c , die nur von r abhängt, sodass für alle $z, z' \in \Omega$

$$c^{-1}|z - z'| \leq \delta(z, z') \leq c|z - z'|$$

gilt. Damit folgt im Fall (i) \Rightarrow (ii)

$$\varepsilon|z - z_1| \leq c\varepsilon\delta(z, z_1) \leq c\delta(z, \partial\Omega) \leq c^2 \operatorname{dist}_e(z, \partial\Omega)$$

und im Fall (ii) \Rightarrow (i)

$$\varepsilon'\delta(z, z_1) \leq c\varepsilon'|z - z_1| \leq c \operatorname{dist}_e(z, \partial\Omega) \leq c^2\delta(z, \partial\Omega).$$

Damit gilt das Behauptete für $\varepsilon := c^{-2}\varepsilon'$. \square

Das folgende Lemma liefert eine hilfreiche Charakterisierung für John-Gebiete. Es ist ein Hauptbestandteil des Beweises von Theorem 2.

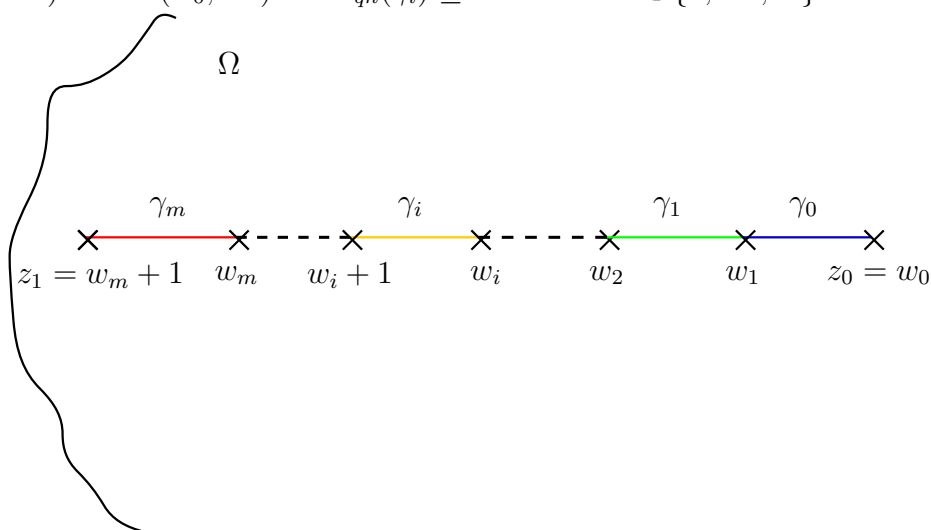
Lemma 3.5.2 (Alternative John-Gebiet Definition) *Sei $\Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ein Gebiet, $z_0 \in \Omega$ und $M > 0$. Es existiere für alle $z_1 \in \Omega$ ein Weg $\gamma_{z_1} \subseteq \Omega$, der z_1 mit z_0 verbindet, sodass für alle orientierungserhaltenden Wege $\gamma' \subseteq \gamma_{z_1}$, die w_1 mit w_0 verbinden, Folgendes gilt:*

$$l_{qh}(\gamma') \geq M \Rightarrow \delta(w_1, \partial\Omega) \leq \frac{1}{2}\delta(w_0, \partial\Omega).$$

Dann ist Ω ein ε -John-Gebiet, wobei ε nur von M abhängt. Es kann $\varepsilon = \varepsilon(M) = \frac{e^{-2M}}{2M}$ gewählt werden.

Beweis: Sei γ_{z_1} ein Weg von z_1 nach z_0 mit den genannten Eigenschaften. Nach der Annahme lässt sich ein $m \in \mathbb{N}_0$ und eine Unterteilung $\gamma_0 \cdot \dots \cdot \gamma_m$ von γ_{z_1} finden, wobei $w_0 = z_0, w_1, \dots, w_m, w_{m+1} = z_1$ die jeweiligen Endpunkte der Wege sind, das heißt, $\gamma_i = \gamma_i(w_{i+1}, w_i)$, sodass gilt:

$\delta(w_i, \partial\Omega) = 2^{-i}\delta(w_0, \partial\Omega)$ und $l_{qh}(\gamma_i) \leq M$ für alle $i \in \{0, \dots, m\}$.



Setze $\delta_i^+ := \max \{\delta(z, \partial\Omega) : z \in \gamma_i\}$ und $\delta_i^- := \min \{\delta(z, \partial\Omega) : z \in \gamma_i\}$. Außerdem seien t_i^+ beziehungsweise t_i^- so gewählt, dass $\delta(\gamma_i(t_i^+), \partial\Omega) = \delta_i^+$ und $\delta(\gamma_i(t_i^-), \partial\Omega) = \delta_i^-$ für alle $i \in \{0, \dots, m\}$ gilt. Wir nehmen an, dass $t_i^- \leq t_i^+$ gilt. Sei γ_i' das Stück von γ_i , das von $\gamma_i(t_i^-)$ bis $\gamma_i(t_i^+)$ geht.

Dann gilt für $i \in \{0, \dots, m\}$

$$\begin{aligned} \log \frac{\delta_i^+}{\delta_i^-} &= \int_{\delta_i^-}^{\delta_i^+} \frac{1}{x} dx = \int_{\delta(\gamma_i(t_i^-), \partial\Omega)}^{\delta(\gamma_i(t_i^+), \partial\Omega)} \frac{1}{x} dx \\ &= \left| \int_{t_i^-}^{t_i^+} \frac{1}{\delta(\gamma_i(t), \partial\Omega)} d(\delta(\gamma_i(t), \partial\Omega)) \right| \\ &\leq \int_{t_i^-}^{t_i^+} \frac{1}{\delta(\gamma_i(t), \partial\Omega)} |d(\delta(\gamma_i(t), \partial\Omega))| \\ &= \int_{\gamma_i'} \frac{1}{\delta(z, \partial\Omega)} |d(\delta(z, \partial\Omega))|. \end{aligned}$$

Außerdem gilt für $z, z' \in \Omega$

$$|\delta(z, \partial\Omega) - \delta(z', \partial\Omega)| \leq \delta(z, z').$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \log \frac{\delta_i^+}{\delta_i^-} &\leq \int_{\gamma_i'} \frac{1}{\delta(z, \partial\Omega)} |d(\delta(z, \partial\Omega))| \\ &\leq \int_{\gamma_i'} \frac{1}{\delta(z, \partial\Omega)} |d\sigma(z)| \\ &= l_{qh}(\gamma_i') \leq l_{qh}(\gamma_i) \leq M. \end{aligned}$$

Daraus folgt für $i \in \{0, \dots, m\}$

$$\delta_i^+ \leq e^M \delta_i^-. \quad (3.5.1)$$

Außerdem gilt für $i \in \{0, \dots, m\}$

$$\begin{aligned} l_{qh}(\gamma_i) &= \int_{\gamma_i} \frac{1}{\delta(z, \partial\Omega)} |d\sigma(z)| \\ &\geq \min_{z \in \gamma_i} \left(\frac{1}{\delta(z, \partial\Omega)} \right) \int_{\gamma_i} |d\sigma(z)| \\ &= \frac{1}{\max_{z \in \gamma_i} \delta(z, \partial\Omega)} l_s(\gamma_i) \\ &= \frac{1}{\delta_i^+} l_s(\gamma_i). \end{aligned}$$

Damit gilt für alle $i \in \{0, \dots, m\}$

$$l_s(\gamma_i) \leq l_{qh}(\gamma_i) \delta_i^+ \leq M \delta_i^+ \leq M e^M \delta_i^- \leq M e^M \delta(w_i, \partial\Omega) = M e^M 2^{-i} \delta(w_0, \partial\Omega).$$

Es folgt für alle $z \in \gamma_i$

$$\delta(z, z_1) \leq \sum_{j=i}^m l_s(\gamma_j) \leq M e^M \delta(w_0, \partial\Omega) \sum_{j=i}^m 2^{-j} \leq 2 \cdot 2^{-i} M e^M \delta(w_0, \partial\Omega). \quad (3.5.2)$$

Mit (3.5.1) folgt für alle $z \in \gamma_i$ und $i \in \{0, \dots, m\}$

$$\delta(z, \partial\Omega) \geq \delta_i^- \geq e^{-M} \delta_i^+ \geq e^{-M} \delta(w_i, \partial\Omega) = e^{-M} 2^{-i} \delta(w_0, \partial\Omega).$$

Dies mit (3.5.2) kombiniert ergibt für alle $z \in \gamma$

$$\delta(z, \partial\Omega) \geq e^{-M} 2^{-i} \delta(w_0, \partial\Omega) = \frac{e^{-2M}}{2M} (2M e^M 2^{-i} \delta(w_0, \partial\Omega)) \geq \frac{e^{-2M}}{2M} \delta(z, z_1).$$

Damit ist Ω ein $\varepsilon(M)$ -John-Gebiet. □

Bemerkung 3.5.3 Gelten die Voraussetzungen von Lemma 3.5.2 für ein Kontinuum K anstelle des Punktes z_0 , so ist Ω auch ein ε -John-Gebiet. In diesem Fall hängt ε allerdings von M , $\frac{\min_{z \in K} \delta(z, \partial\Omega)}{\max_{z \in K} \delta(z, \partial\Omega)}$ und $\text{diam}_{qh}(K)$ ab.

Beweis: Sei $z_1 \in \Omega \setminus K$ und $\gamma \subseteq \Omega \setminus K$ ein Weg mit den genannten Eigenschaften, der z_1 mit K verbindet. Sei $z_0 \in K$. Verbinde den Endpunkt von γ mit z_0 über eine Kurve γ_0 in Ω mit $l_{qh}(\gamma_0) \leq \text{diam}_{qh}(K)$. Setze $\gamma_{z_1} = \gamma \cdot \gamma_0$. Da K kompakt und in Ω enthalten ist, existiert $d := \min_{z \in K} \delta(z, \partial\Omega)$ und $e := \max_{z \in K} \delta(z, \partial\Omega)$. Sei $n > 0$ so gewählt, dass $\frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{d}{e}$ gilt. Setze nun

$$M' := n \cdot M + \text{diam}_{qh}(K).$$

Sei $\gamma' \subseteq \gamma_{z_1}$ ein Weg von w_1 zu w_0 mit $l_{qh}(\gamma') \geq M'$, dann liegt w_1 außerhalb von K . Liegt w_0 nicht in K , so gilt die Aussage bereits. Liegt w_0 in K , so gilt für w' , den Endpunkt von γ , $w' \in \partial K$ und $\delta(w_1, \partial\Omega) \leq \frac{1}{2^n} \delta(w', \partial\Omega)$, da $M' \geq nM$ ist. Daraus folgt

$$\delta(w_1, \partial\Omega) \leq \frac{1}{2^n} \delta(w', \partial\Omega) \leq \frac{1}{2} \frac{d}{e} \delta(w', \partial\Omega) \leq \frac{1}{2} d \leq \frac{1}{2} \delta(w_0, \partial\Omega).$$

Damit ist Ω nach Lemma 3.5.2 ein $\varepsilon(M')$ -John-Gebiet. \square

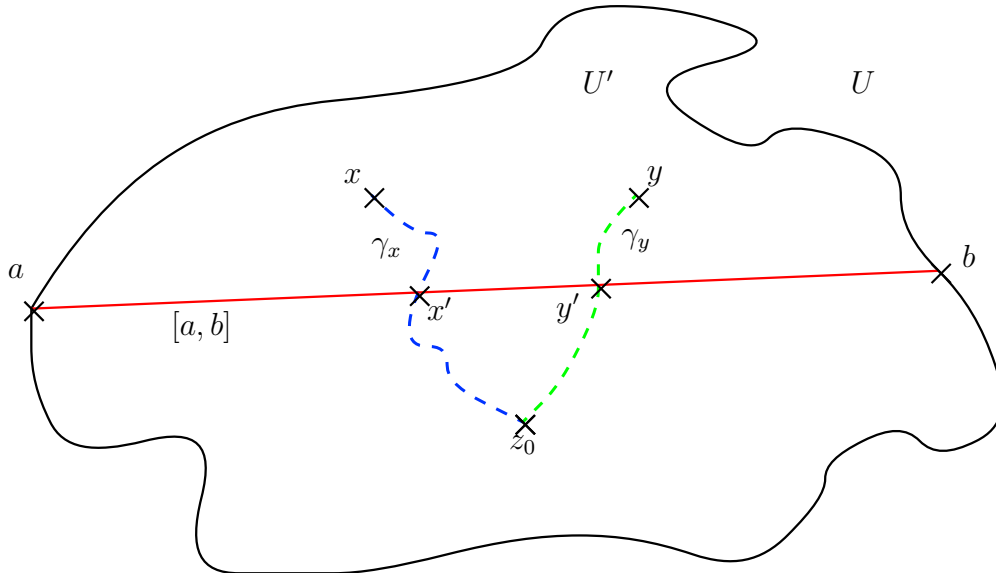
Bemerkung 3.5.4 Die Eigenschaft in Lemma 3.5.2 ist sogar äquivalent zur ursprünglichen John-Gebiet-Definition. Dies wurde in [17] bewiesen.

Lemma 3.5.5 (Alternative John-Gebiet-Definition für einfach zusammenhängende Gebiete) *Seien U ein einfach zusammenhängendes ε -John-Gebiet, $[a, b]$ ein Querschnitt von U und U_1, U_2 die Komponenten von $U \setminus [a, b]$. Dann gilt*

$$\min(\text{diam}_s U_1, \text{diam}_s U_2) \leq \varepsilon^{-1} \delta(a, b).$$

Beweis: Sei z_0 das John-Zentrum von U . Sei außerdem U' eine Komponente von $U \setminus [a, b]$, die z_0 nicht enthält. Seien $x, y \in U'$ und γ_x, γ_y die Wege aus der John-Gebiet-Definition, die x beziehungsweise y mit z_0 verbinden. Sei $x' \in [a, b] \cap \gamma_x$ und $y' \in [a, b] \cap \gamma_y$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $[a, x'] \subseteq [a, y']$. Da $[a, b]$ eine Geodätische ist, gilt

$$\delta(a, b) = \delta(a, x') + \delta(x', y') + \delta(y', b).$$



Da $a, b \in \partial U$, gilt

$$\delta(a, x') \geq \delta(x', \partial U) \geq \varepsilon \delta(x, x') \text{ und } \delta(y', b) \geq \delta(y', \partial U) \geq \varepsilon \delta(y', y).$$

Daraus folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung, $\varepsilon \leq 1$ und der Tatsache, dass $[a, b]$ eine sphärische Geodätische ist

$$\begin{aligned} \delta(a, b) &= \delta(a, x') + \delta(x', y') + \delta(y', b) \\ &\geq \varepsilon\delta(x, x') + \delta(x', y') + \varepsilon\delta(y', y) \\ &\geq \varepsilon\delta(x, x') + \varepsilon\delta(x', y') + \varepsilon\delta(y', y) \\ &\geq \varepsilon\delta(x, y). \end{aligned}$$

Da $x, y \in U'$ beliebig gewählt wurden, gilt

$$\begin{aligned} \delta(a, b) &\geq \varepsilon \operatorname{diam}_s U' \\ &\geq \varepsilon \min(\operatorname{diam}_s U_1, \operatorname{diam}_s U_2). \end{aligned}$$

Also folgt

$$\min(\operatorname{diam}_s U_1, \operatorname{diam}_s U_2) \leq \varepsilon^{-1} \delta(a, b).$$

□

Bemerkung 3.5.6 Die Eigenschaft aus dem letzten Lemma ist für einfach zusammenhängende Gebiete eine äquivalente Definition für John-Gebiete. Siehe dazu [13, Theorem 4.4].

Das nächste Lemma zeigt, dass Pullbacks von John-Gebieten unter rationalen Abbildungen wieder John-Gebiete sind. Genau genommen benötigen wir in dieser Arbeit nur, dass Pullbacks von Quasischeiben unter rationalen Abbildungen wieder John-Gebiete sind.

Lemma 3.5.7 (Pullbacks von John-Gebieten) *Ist $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ der Pullback eines John-Gebiets $V \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ unter einer rationalen Abbildung f und $z, z' \in \overline{\mathbb{C}}$ sowie $r > 0$ mit $B_s(z, r) \subseteq \overline{\mathbb{C}} \setminus U$ und $B_s(z', r) \subseteq \overline{\mathbb{C}} \setminus V$, so ist U ebenfalls ein John-Gebiet.*

Beweis: Durch Rotationen im Bild- sowie im Urbildbereich können wir erreichen, dass $B_s(\infty, r) \subseteq \overline{\mathbb{C}} \setminus (U \cup V)$ gilt. Seien $z_1 \in \partial U$ und $z_2 \in \partial V$ mit $f(z_1) = z_2$. Durch Konjugation mit Möbiustransformationen können wir erreichen, dass $z_1 = z_2 = 0$ gilt. Dann gilt für ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$f(z) \sim c \cdot z^m \text{ für } z \rightarrow 0.$$

Wieder durch Konjugation mit einer Möbiustransformation können wir $c = 1$ und damit

$$f(z) \sim z^m \text{ für } z \rightarrow 0$$

erreichen. Seien $u \in U$ und $v = f(u) \in V$ nahe bei 0. Da $f(z) \sim z^m$ für $z \rightarrow 0$ gilt, lässt sich ein Zweig g von f^{-1} mit $g(v) = u$ definieren. Dann gilt

$$|g'(v)| \sim \frac{1}{m} |v|^{\frac{1}{m}-1} \sim \frac{1}{m} \frac{|u|}{|v|}.$$

Nach dem Satz von Koebe gilt dann

$$\text{dist}_e(u, \partial U) \geq \frac{1}{4} |g'(v)| \text{dist}_e(v, \partial V).$$

Daraus folgt

$$\text{dist}_e(u, \partial U) \geq (1 - o(1)) \frac{1}{4m} \frac{|u|}{|v|} \text{dist}_e(v, \partial V). \quad (3.5.3)$$

Da V ein John-Gebiet ist und wir Lemma 3.5.1 anwenden können, existieren $v_0 \in V$ und $\varepsilon > 0$, sodass $v_1 \in V$ mit v_0 durch einen Weg γ_{v_1} verbunden werden kann, sodass

$$\text{dist}_e(v, \partial V) \geq \varepsilon |v - v_1| \quad (3.5.4)$$

für alle $v \in \gamma_{v_1}$ gilt.

Wir wollen zeigen, dass U ein John-Gebiet ist. Sei also $u_1 \in U$. Zunächst betrachten wir den Fall, dass u_1 nahe bei 0 liegt. Sei also $v_1 = f(u_1)$ und γ_{v_1} der Weg aus der John-Gebiet-Eigenschaft von V . Sei g der Zweig von f^{-1} mit $g(v_1) = u_1$ und sei $\gamma := g \circ \gamma_{v_1}$.

Wir wollen nun

$$\text{dist}_e(u, \partial U) \geq \varepsilon' |u - u_1| \quad (3.5.5)$$

für ein $\varepsilon' > 0$ und alle $u \in \gamma$ zeigen. Wir tun dies nur für u nahe 0, da es nach Lemma 2.8.3 ausreicht, u_1 mit einer kompakten wegzusammenhängenden Teilmenge von U zu verbinden. Aus den Gleichungen (3.5.3) und (3.5.4) folgt

$$\text{dist}_e(u, \partial U) \geq (1 - o(1)) \frac{1}{4m} \frac{|u|}{|v|} \varepsilon |v - v_1|. \quad (3.5.6)$$

Da $0 \in \partial V$, folgt aus (3.5.4) insbesondere, dass $|v| \geq \varepsilon |v - v_1|$ gilt. Daraus folgt

$$|v| \geq \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} |v_1|.$$

Aus $|u| \sim |v|^{1/m}$ und $|u_1| \sim |v_1|^{1/m}$ folgt somit

$$|u| \geq c_1 |u_1|$$

mit einer Konstante $c_1 < (\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon})^{1/m}$, falls u_1 und u in einer genügend kleinen Umgebung von 0 liegen. Daraus folgt

$$|u - u_1| \leq |u| + |u_1| \leq (1 + \frac{1}{c_1}) |u|,$$

also

$$|u| \geq c_2 |u - u_1|$$

mit einer Konstante $c_2 := \frac{c_1}{c_1+1}$. Damit erhält die Gleichung (3.5.6) die Form

$$\text{dist}_e(u, \partial U) \geq (1 - o(1)) \frac{\varepsilon c_2}{4m} \frac{|v - v_1|}{|v|} |u - u_1|.$$

Angenommen $\frac{|v-v_1|}{|v|} > \frac{1}{4}$, so gilt die Gleichung (3.5.5) mit einer Konstante $c_3 := (1 - o(1))\frac{\varepsilon c_2}{16m}$. Sei also $\frac{|v-v_1|}{|v|} \leq \frac{1}{4}$, dann gilt

$$|v| \leq \frac{4}{3}|v_1|$$

und damit

$$\frac{|v - v_1|}{|v_1|} \leq \frac{1}{3}.$$

Setze $\varrho' := \frac{|v-v_1|}{|v_1|}$ und $\varrho := \frac{1}{3}$, dann gilt $\varrho' \leq \varrho$ und mit dem Satz von Koebe, angewendet auf $B_e(v_1, \varrho'|v_1|)$, folgt

$$\begin{aligned} |u - u_1| &= |g(v) - g(v_1)| \\ &\leq |g'(v_1)||v_1| \frac{\varrho'}{(1 - \varrho')^2} \\ &= |g'(v_1)||v_1| \frac{\frac{|v-v_1|}{|v_1|}}{(1 - \varrho')^2} \\ &= |g'(v_1)||v - v_1| \frac{1}{(1 - \varrho')^2} \\ &\leq |g'(v_1)||v - v_1| \frac{1}{(1 - \varrho)^2}. \end{aligned}$$

Gleichzeitig gilt für $v \in B_e(v_1, \varrho|v_1|)$

$$|g'(v_1)| \leq |g'(v)| \frac{(1 + \varrho)^3}{1 - \varrho}.$$

Aus den letzten beiden Ungleichungen folgt für $v \in B_e(v_1, \varrho|v_1|)$

$$|u - u_1| \leq c_4 |g'(v)| |v - v_1|$$

mit einer Konstante $c_4 := \frac{(1+\varrho)^3}{(1-\varrho)^3}$. Außerdem folgt aus dem Satz von Koebe, angewendet auf $B_e(v, \text{dist}_e(v, \partial V))$,

$$\text{dist}_e(u, \partial U) \geq \frac{1}{4} |g'(v)| \text{dist}_e(v, \partial V).$$

Zusammen mit der Gleichung (3.5.4) und den letzten beiden Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} \text{dist}_e(u, \partial U) &\geq \frac{1}{4} |g'(v)| \text{dist}_e(v, \partial V) \\ &\geq \frac{|g'(v)|\varepsilon}{4} |v - v_1| \\ &\geq \frac{\varepsilon}{4c_4} |u - u_1|. \end{aligned}$$

Setze $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{4c_4}$, damit ist (3.5.5) gezeigt. Für gegebenes $z_1 \in \partial U$ haben wir also eine Umgebung gefunden, in der die John-Gebiet-Eigenschaft gilt. Da der Rand kompakt ist, lässt er sich mit endlich vielen solcher Umgebungen überdecken. Nach Lemma 3.5.1 ist also U ein John-Gebiet. \square

3.6 Kriterium für den lokalen Zusammenhang

Der folgende Satz liefert die Basis für den Beweis von Theorem 3. Für weitere Resultate siehe [29].

Satz 3.6.1 (Kriterium für lokalen Zusammenhang) *Sei $K \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ein Kontinuum und $(U_n)_{n \geq 0}$ die Folge der Komponenten des Komplements $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$. Sind alle ∂U_n lokal zusammenhängend und gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}_s U_n = 0,$$

dann ist K lokal zusammenhängend.

Beweis: Sei $\tau > 0$. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}_s U_n = 0$ gilt, existiert ein $m > 0$, sodass für alle $n > m$ Folgendes gilt:

$$\text{diam}_s U_n < \frac{\tau}{3}.$$

Wähle für alle $n = 0, \dots, m$ ein $\theta_n > 0$, sodass für alle $a, b \in \partial U_n$ mit $\delta(a, b) < \theta_n$ ein Kontinuum $D \subseteq \partial U_n$ existiert, für das Folgendes gilt:

$$a, b \in D, \text{diam}_s D < \frac{\tau}{3}.$$

Setze $\theta := \min\{\theta_0, \dots, \theta_m, \frac{\tau}{3}\}$, dann existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a, b \in \partial U_n$ mit $\delta(a, b) < \theta$ ein Kontinuum $D \subseteq \partial U_n$, für das Folgendes gilt:

$$a, b \in D, \text{diam}_s D < \frac{\tau}{3}.$$

Seien $a, b \in K$ mit $\delta(a, b) < \theta \leq \frac{\tau}{3}$.

Sei $E = \partial([a, b] \cap K)$, versehen mit der Topologie der reellen Achse und $B = [a, b] \setminus E$. Dann ist E kompakt mit leerem Inneren, daher ist B dicht und offen in $[a, b]$. Für jede Komponente I von B gilt $\partial I \subseteq K$ und entweder $I \subseteq K$ oder $I \cap K = \emptyset$.

(i) Ist $I \subseteq K$, so definieren wir

$$C(I) = \overline{I}.$$

(ii) Ist $I \cap K = \emptyset$, so existiert ein U_n mit $I \subseteq U_n$ und $\partial I \subseteq \partial U_n$. Nach der Überlegung von oben existiert für alle $n \geq 0$ ein Kontinuum $D \subseteq \partial U_n \subseteq K$ mit

$$a, b \in D, \text{diam}_s D < \frac{\tau}{3}.$$

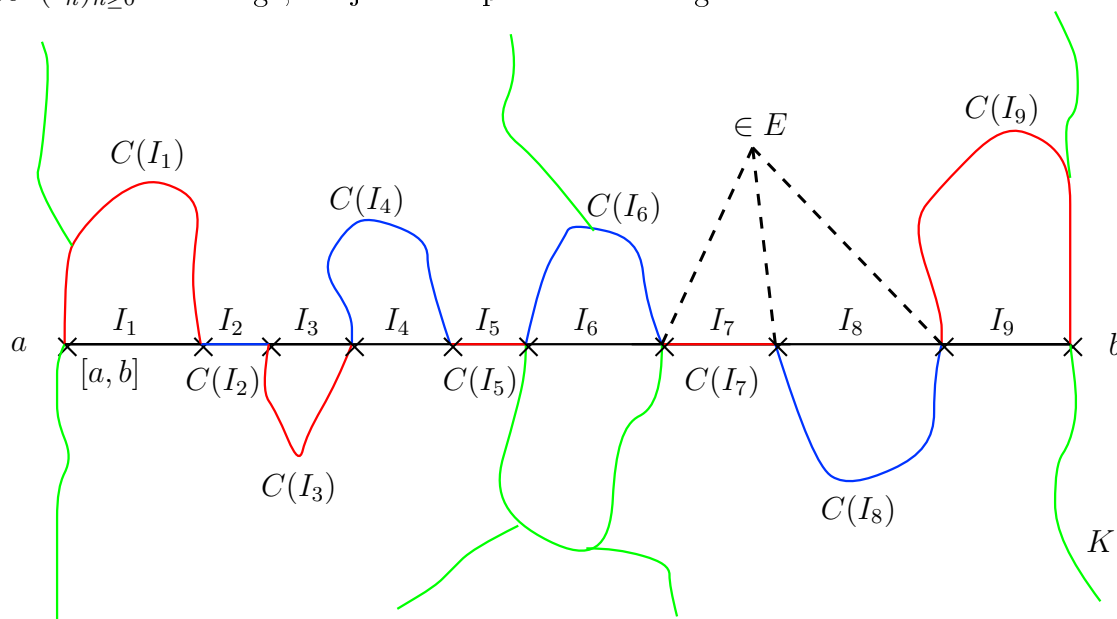
Definiere nun

$$C(I) = D.$$

In beiden Fällen ist $C(I) \subseteq K$ ein Kontinuum, das ∂I enthält und für das gilt:

- (i) $\text{diam}_s C(I) = \text{diam}_s I \leq \text{diam}_s [a, b] < \frac{\tau}{3}$.
- (ii) $\text{diam}_s C(I) = \text{diam}_s D < \frac{\tau}{3}$.

Sei $(I_n)_{n \geq 0}$ eine Folge, die jede Komponente von B genau einmal enthält.



Sei

$$C' = E \cup \bigcup_{n \geq 0} C(I_n)$$

und

$$C = \overline{C'} \subseteq K.$$

Wir werden zeigen, dass C' zusammenhängend, also ein Kontinuum ist. Nach Konstruktion gilt dann

$$C \subseteq [a, b] + \overline{B_s(0, \tau/3)} := \{z \in \overline{C'} : \delta([a, b], z) \leq \tau/3\}.$$

Daraus folgt mit $\delta(a, b) < \frac{\tau}{3}$

$$\text{diam}_s C < \tau.$$

Damit ist K lokal zusammenhängend.

Es bleibt folglich zu zeigen, dass C' zusammenhängend ist. Nehmen wir dazu an, dass C' nicht zusammenhängend ist. Dann existieren zwei Mengen A_1 und A_2 mit $A_1 \cap C' \neq \emptyset$,

$A_2 \cap C' \neq \emptyset$, $\overline{A_1} \cap A_2 = A_1 \cap \overline{A_2} = \emptyset$ und $C' \subseteq A_1 \cup A_2$. Wir können annehmen, dass $a \in A_1$ ist und somit $E \cap A_2 \neq \emptyset$ gilt, da sonst $C' \subseteq A_1$ gelten würde. Sei

$$x = \inf(E \cap A_2).$$

Angenommen $x = \sup I_k$ für ein $k \geq 0$. Dann ist $\inf I_k \in A_1$, also $C(I_k) \subseteq A_1$ und insbesondere $x \in A_1$, da $C(I_k)$ zusammenhängend ist. Dann gilt aber $x \in A_1 \cap \overline{A_2}$, das ist ein Widerspruch. Also ist x ein Häufungspunkt von $E \cap A_1$.

Ist $x = \inf I_k$ für ein $k \geq 0$, so gilt $C(I_k) \subseteq A_2$ aufgrund der Definition von x . Das ist aber ein Widerspruch zu $\overline{A_1} \cap A_2 = \emptyset$. Also ist x ein Häufungspunkt von $E \cap A_2$.

Darüber hinaus ist x ein Häufungspunkt von E und liegt somit in E , da E abgeschlossen ist. Auch das führt zu einem Widerspruch, da $x \in E \subseteq C' \subseteq A_1 \cup A_2$ gilt, und damit ist entweder $\overline{A_1} \cap A_2 = \emptyset$ oder $A_1 \cap \overline{A_2} = \emptyset$ verletzt, da x sowohl Häufungspunkt von A_1 , als auch von A_2 ist. Daher ist C' zusammenhängend. \square

Kapitel 4

Die Hauptergebnisse

In diesem Kapitel werden wir uns den drei Hauptresultaten widmen. Mit den im letzten Kapitel bewiesenen Hilfsmitteln sind wir nun in der Lage, diese zu beweisen. Zwecks Vollständigkeit werden wir hier die Theoreme, die wir beweisen wollen, noch einmal formulieren.

4.1 Semihyperbolizität

Der Semihyperbolische Äquivalenzsatz liefert einige nützliche Charakterisierungen für semihyperbolische Abbildungen und ist daher sehr bedeutend, wenn man solche Abbildungen betrachtet. Der Beweis von (i) \Rightarrow (ii) basiert auf dem von Bergweiler und Morosawa [6], wir haben hier jedoch zusätzlich Elemente der Konstruktionen von Mihalache eingefügt.

Theorem 1 (Semihyperbolischer Äquivalenzsatz) *Sei f eine rationale Funktion. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

- (i) *f ist semihyperbolisch, das heißt, es existieren ein $r > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $z \in \mathcal{J}$, $n > 0$ und alle Komponenten U von $f^{-n}(B_s(z, r))$ Folgendes gilt:*

$$\deg(f^n|_U) \leq N.$$

- (ii) *f ist semihyperbolisch und erfüllt die ExpShrink-Bedingung, das heißt, es existieren ein $\lambda > 1$, ein $r > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $z \in \mathcal{J}$, $n > 0$ und alle Komponenten U von $f^{-n}(B_s(z, r))$ Folgendes gilt:*

$$\deg(f^n|_U) \leq N, \text{ diam}_s U < \lambda^{-n}.$$

- (iii) *f erfüllt die Misiurewicz-Bedingung, das heißt, f hat keine parabolischen Gebiete und alle kritischen Punkte $z \in \mathcal{J}$ sind nichtrekurrent, das bedeutet, es gilt $z \notin \omega(z)$, wobei*

$$\omega(z) = \bigcap_{N \geq 0} \overline{\{f^n(z) : n \geq N\}}$$

die Häufungspunktmenge des Orbits von z ist.

Beweis: (i) \Rightarrow (ii): Seien $0 < r \leq \frac{1}{8}$ und $N \in \mathbb{N}$, wobei N der Parameter aus der Definition von semihyperbolisch ist und r nicht größer als das Minimum der Radien aus der Definition von semihyperbolisch und Lemma 3.4.1 ist.

Sei $L \in (0, \frac{1}{2})$ aus der Bemerkung 2.7.14. Nach Lemma 3.4.1 existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$

$$\text{diam}_s(V) < \frac{rL}{2} < \frac{r}{4} \tag{4.1.1}$$

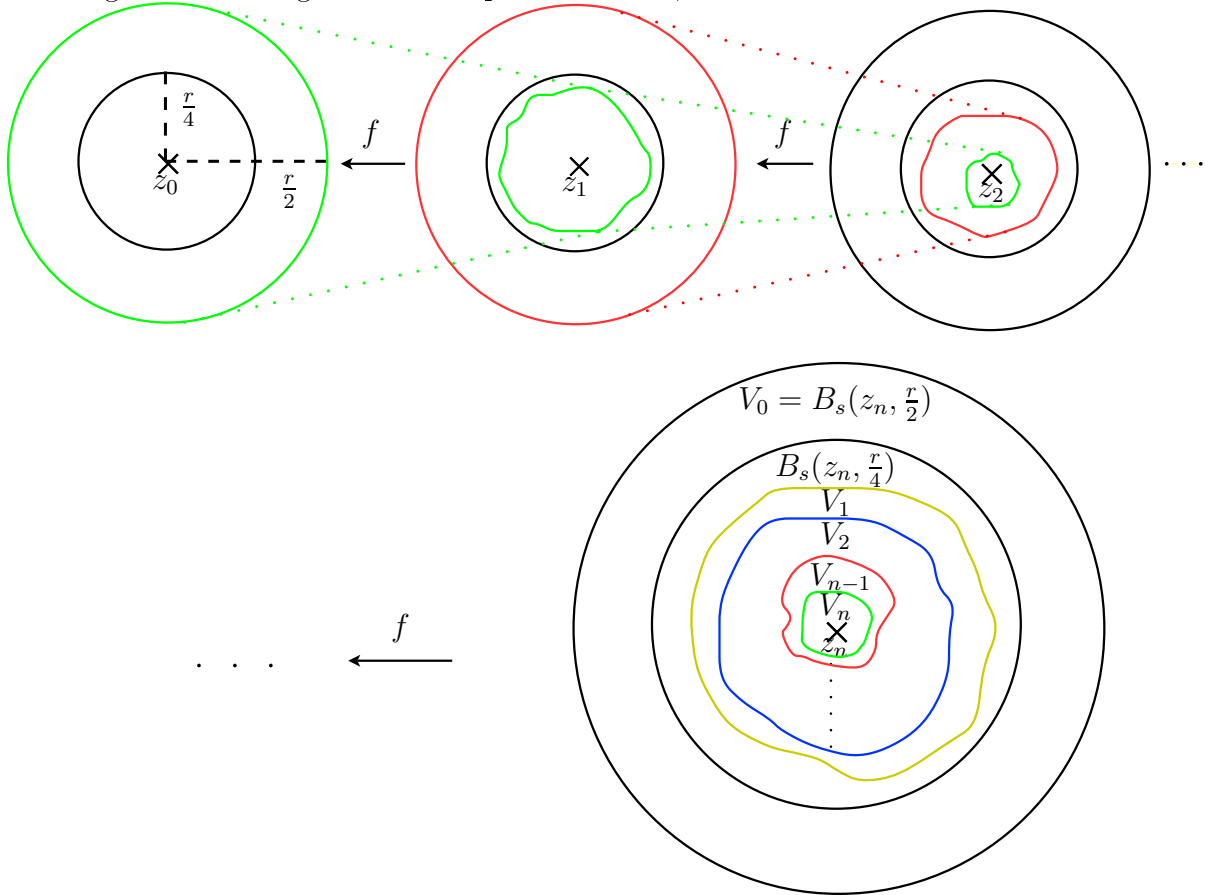
für alle Komponenten von $f^{-n}(B_s(z, \frac{r}{2}))$ gilt. Wir können annehmen, dass $n_0 = 1$ gilt. Wir fixieren nun $z_0 \in \mathcal{J}$ und $n \in \mathbb{N}$ und wählen eine Komponente V_n von $f^{-n}(B_s(z_0, \frac{r}{2}))$. Wähle $z_n \in V_n \cap \mathcal{J}$ mit $f^n(z_n) = z_0$ und setze $z_{n-k} = f^k(z_n)$ für $k = 1, 2, \dots, n-1$. Sei V_k die Komponente von $f^{-k}(B_s(z_{n-k}, \frac{r}{2}))$, die z_n enthält. Dann gilt

$$f^k(V_{k+1}) \subseteq B_s\left(z_{n-k}, \frac{r}{4}\right) \tag{4.1.2}$$

für $k = 1, 2, \dots, n - 1$ und

$$V_0 := B_s \left(z_n, \frac{r}{2} \right) \supseteq V_1 \supseteq \dots \supseteq V_n.$$

Das folgende Bild zeigt die Teleskopkonstruktion, die wir in diesem Beweis anwenden:



Wir wollen nun ein ähnliches Argument wie schon im Beweis zu Lemma 3.3.1 verwenden. Sei $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ und seien A_1, \dots, A_m disjunkte konzentrische Ringgebiete innerhalb von $A := B_s(z_{n-k}, \frac{r}{2}) \setminus \overline{B_s(z_{n-k}, \frac{r}{4})}$, die kritische Werte von $f^k|_{V_k}$ vermeiden, das heißt, dass alle kritischen Werte in den Rändern der Ringgebiete liegen. Außerdem gelte $\bigcup_{i=1}^m \overline{A_i} = \overline{A}$. Daraus folgt mit Lemma 2.7.7

$$\sum_{i=1}^m \text{mod } A_i = \text{mod } A. \tag{4.1.3}$$

Sei $A_i^{-k} \subseteq V_n$ die Komponente von $f^{-k}(A_i)$, für die $z_n \in \text{fill}(A_i^{-k})$ gilt. Dann ist $f^k : A_i^{-k} \rightarrow A_i$ eine eigentliche Abbildung für alle $i \in \{1, \dots, m\}$. Damit ist A_i^{-k} zweifach zusammenhängend nach der Riemann-Hurwitz-Formel, da f^k keine kritischen Punkte in

A_i^{-k} besitzt. Mit Lemma 2.7.6 gilt

$$\text{mod } A_i^{-k} = \frac{1}{\deg(f^k|_{A_i^{-k}})} \text{mod } A_i \geq \frac{1}{\deg(f^k|_{V_k})} \text{mod } A_i \geq \frac{1}{N} \text{mod } A_i. \quad (4.1.4)$$

Sei V'_k die Komponente von $f^{-k}(B_s(z_{n-k}, \frac{r}{4}))$, die z_n enthält. Es folgt mit Lemma 2.7.5, (4.1.3), (4.1.4), Lemma 2.7.7 und (4.1.2)

$$\begin{aligned} \frac{\log 2}{2\pi} &< \text{mod} \left(B_s \left(z_{n-k}, \frac{r}{2} \right) \setminus \overline{B_s \left(z_{n-k}, \frac{r}{4} \right)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \text{mod } A_i \\ &\leq N \sum_{i=1}^m \text{mod } A_i^{-k} \\ &\leq N \text{mod}(V_k \setminus \overline{V'_k}) \\ &\leq N \text{mod}(V_k \setminus \overline{V_{k+1}}). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\text{mod}(V_k \setminus \overline{V_{k+1}}) > \frac{\log 2}{2\pi N}$$

für alle $k = 1, 2, \dots, n-1$. Da $V_1 \subseteq B_s(z_n, \frac{r}{4})$ gilt, gilt die letzte Ungleichung auch für $k = 0$. Mit Lemma 2.7.13, Bemerkung 2.7.14 und Ungleichung (4.1.1) folgt

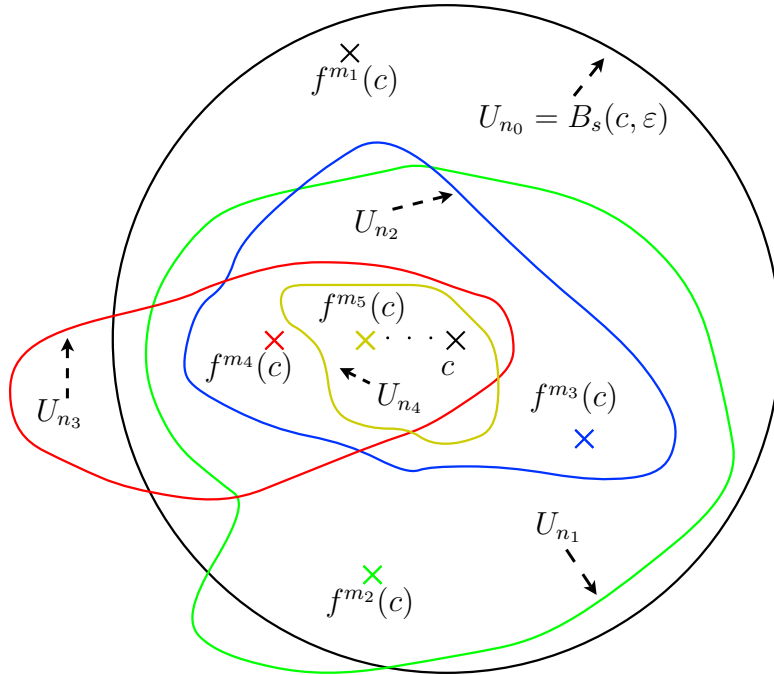
$$\log \left(4 \frac{4r}{2 \text{diam}_s(V_n)} \right) > \mu \left(\frac{2 \text{diam}_s(V_n)}{4r} \right) \geq \text{mod}(V_0 \setminus \overline{V_n}) \geq \sum_{k=0}^{n-1} \text{mod}(V_k \setminus \overline{V_{k+1}}) > \frac{n \log 2}{2\pi N}.$$

Setze nun $c := 8r$ und $\lambda := 2^{\frac{1}{2\pi N}}$, und wir erhalten

$$\text{diam}_s(V_n) < c\lambda^{-n}.$$

Nach Wahl von r gilt $c \leq 1$, damit ist die ExpShrink-Bedingung erfüllt.

(ii) \Rightarrow (iii): Nach Lemma 3.4.3 besitzt f keine parabolischen Gebiete. Angenommen es existiert ein kritischer Punkt $c \in \mathcal{J}$ mit $c \in \omega(c)$. Sei $\varepsilon > 0$ und U_n für alle $n \geq 0$ eine Komponente von $f^{-n}(B_s(c, \varepsilon))$. Wir konstruieren nun induktiv eine Folge $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ und damit eine Folge $(U_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$, sodass $c \in U_{n_j}$ für alle $j \geq 0$ gilt. Setze $n_0 := 0$ beziehungsweise $U_{n_0} := B_s(c, \varepsilon)$. Sei $j \in \mathbb{N}_0$ und n_i sowie U_{n_i} für alle $i \in \{0, 1, \dots, j\}$ bereits konstruiert. U_{n_j} enthält ein $f^{m_{j+1}}(c)$ für ein genügend großes m_{j+1} . Dann existiert eine Komponente U von $f^{-m_{j+1}}(U_{n_j})$, die c enthält. Setze dann $n_{j+1} := n_j + m_{j+1}$ und $U_{n_{j+1}} := U$.



Damit gilt

$$\deg(f^{n_j} : U_{n_j} \rightarrow B_s(c, \epsilon)) \geq 2^j$$

für alle $j \in \mathbb{N}$, da jedes U_{n_j} mindestens einen kritischen Punkt enthält. Folglich ist der Abbildungsgrad der Verzweigung von $B_s(c, \epsilon)$ unbeschränkt, was ein Widerspruch zur Semihyperbolizität von f ist.

Bemerkung 4.1.1 Wir haben beim Beweis von (ii) \Rightarrow (iii) nicht benutzt, dass f die ExpShrink-Bedingung erfüllt.

(iii) \Rightarrow (i): Da alle kritischen Punkte nichtrekurrent sind, existiert ein $\tau > 0$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle kritischen Punkte c

$$\delta(f^n(c), c) \geq \tau \quad (4.1.5)$$

gilt. Nach Satz 2.5.9 erfüllt f die ExpShrink-Eigenschaft. Damit existiert ein $r_0 > 0$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathcal{J}$ und alle Komponenten U_n von $f^{-n}(B_s(z, r_0))$

$$\text{diam}_s U_n < \tau$$

gilt. Angenommen, ein solches N wie in (i) gefordert existiert nicht, dann existiert ein $x \in \mathcal{J}$, ein $0 < r < r_0$ und für alle $k > 0$ ein $n(k) \in \mathbb{N}$ sowie eine Komponente $U_{n(k)}$, sodass

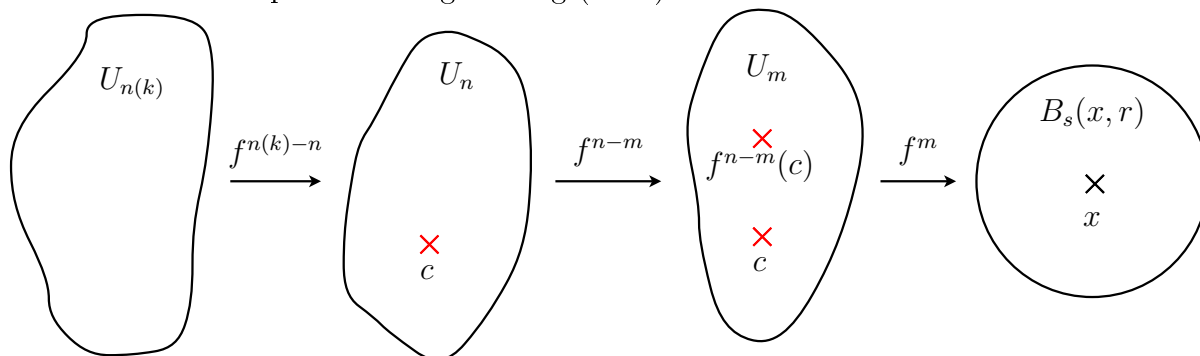
$$\deg(f^{n(k)} : U_{n(k)} \rightarrow B_s(x, r)) \geq k$$

gilt. Wählt man nun $k > \deg(f)^{2 \deg(f) - 2}$, so existiert ein kritischer Punkt c mit $c \in U_n$, $c \in U_m$ und $n(k) \geq n > m$, wobei $f^{n(k)-n}(U_{n(k)}) = U_n$ und $f^{n(k)-m}(U_{n(k)}) = U_m$ gilt. Dies

folgt, da für jeden kritischen Punkt der Abbildungsgrad höchstens um den Faktor $\deg(f)$ wächst. Da aber jede rationale Abbildung höchstens $2 \deg(f) - 2$ verschiedene kritische Punkte besitzt, muss mindestens ein kritischer Punkt mehrfach auftreten, wenn der Abbildungsgrad größer als $\deg(f)^{2 \deg(f) - 2}$ ist. Damit gilt dann aber auch $f^{n-m}(c) \in U_m$ und daraus folgt

$$\delta(f^{n-m}(c), c) < \tau.$$

Dies ist ein Widerspruch zu Ungleichung (4.1.5).



□

Korollar 4.1.2 *Jede subhyperbolische Abbildung ist schon semihyperbolisch.*

Beweis: Sei f eine subhyperbolische Abbildung. Ist $c \in \mathcal{F}$ ein kritischer Punkt von f , so liegt c bereits in einem Attraktionsgebiet. Daher gibt es keine parabolischen Gebiete nach Satz 2.4.17. Ist $c \in \mathcal{J}$ ein kritischer Punkt, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $c \neq \infty$ gilt. Dann gilt für $p \in \mathbb{N}$

$$(f^p)'(c) = f'(c) \cdot \prod_{i=1}^{p-1} f'(f^i(c)) = 0.$$

Damit ist jeder kritische und periodische Punkt bereits superattraktiv und liegt nicht in der Juliamenge. Das heißt, alle kritischen Punkte in der Juliamenge sind präperiodisch, aber nicht periodisch. Damit erfüllt f die Misiurewicz-Bedingung und ist dem letzten Theorem zufolge semihyperbolisch. □

4.2 John-Regularität der Fatoukomponenten

In diesem Abschnitt beweisen wir neben Theorem 2 auch, dass im Fall einer zusammenhängenden Juliamenge die John-Konstante sogar gleichmäßig für alle Fatoukomponenten gewählt werden kann.

Theorem 2 *Fatoukomponenten einer rationalen, semihyperbolischen Abbildung sind John-Gebiete.*

Beweis: Sei f eine rationale, semihyperbolische Abbildung. Ist $\mathcal{J} = \overline{\mathbb{C}}$, so ist nichts zu beweisen.

Sei also $\mathcal{J} \neq \overline{\mathbb{C}}$. Da f semihyperbolisch ist, erfüllt f nach Theorem 1 auch die ExpShrink-Eigenschaft und daher sind, nach Bemerkung 3.4.3, alle periodischen Fatoukomponenten anziehend. Wir zeigen zuerst mit Hilfe von Lemma 3.5.2, dass jede periodische, und damit anziehende, Fatoukomponente ein John-Gebiet ist. Anschließend zeigen wir, dass auch die Pullbacks dieser attraktiven periodischen Komponenten John-Gebiete sind.

Sei also Ω eine periodische Fatoukomponente. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $f(\Omega) = \Omega$ gilt. Da Ω anziehend ist, existiert ein anziehender Fixpunkt $z_0 \in \Omega$. Dann werden alle Orbits in Ω von z_0 angezogen, sodass für alle $z \in \Omega$ Folgendes gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = z_0$$

Wir konstruieren nun ein Gebiet V mit $\overline{V} \subseteq \Omega$, sodass $z_0 \in V$ und $\overline{f(V)} \subseteq V$ gilt und für alle $z \in \Omega \setminus V$ mit $f(z) \in V$ Folgendes gilt: $f(z) \notin f(V)$.

Für jede offene Menge $W \subseteq \Omega$, die z_0 enthält, definieren wir $n_W : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$, sodass $n_W(z)$ minimal ist mit $f^{n_W(z)}(z) \in W$. Da Ω der unmittelbare Einzugsbereich von z_0 ist, ist n_W wohldefiniert auf Ω .

Sei $W = B_s(z_0, r_0)$ für ein $r_0 > 0$ so gewählt, dass ∂W keine kritischen Orbits schneidet und $\overline{f(W)} \subseteq W$ gilt. Dadurch ist $\partial f^{-k}(W)$ glatt für alle $k \geq 0$, denn sei $u_k \in \partial f^{-k}(W)$, so ist $u_0 = f^k(u_k) \in \partial W$. Dann existieren Umgebungen U_k von u_k und U_0 von u_0 , sodass $f^k : U_k \rightarrow U_0$ konform ist, wähle dazu $U_0 \cap P(f) = \emptyset$. Dann gilt mit $\varphi := (f^k)^{-1} : U_0 \rightarrow U_k$

$$\partial f^{-k}(W) \cap U_k = \varphi(\partial W \cap U_0).$$

Damit ist $\partial f^{-k}(W)$ für alle $k \geq 0$ lokal das Bild eines Kreisbogens unter einer konformen Abbildung und daher selbst glatt. Ebenso gilt $\overline{f^{-k}(W)} \subseteq f^{-(k+1)}(W)$ für alle $k \geq 0$, da Urbildbildung Mengenrelationen erhält. Für alle $k \geq 0$ sei W_k die Komponente von $f^{-k}(W)$, die z_0 enthält. Es gilt demnach $\overline{W_k} \subseteq \Omega$ für alle $k \geq 0$. Es sei außerdem $\{z_0, z_1, \dots, z_m\} = f^{-1}(z_0) \cap \Omega$. Es existieren Wege $\gamma_1, \dots, \gamma_m \subseteq \Omega$, die z_0 mit z_1, \dots, z_m verbinden. Da alle $\gamma_1, \dots, \gamma_m \subseteq \Omega$ kompakt sind, existiert ein $k_0 \geq 0$, sodass für alle $i = 1, \dots, m$ Folgendes gilt:

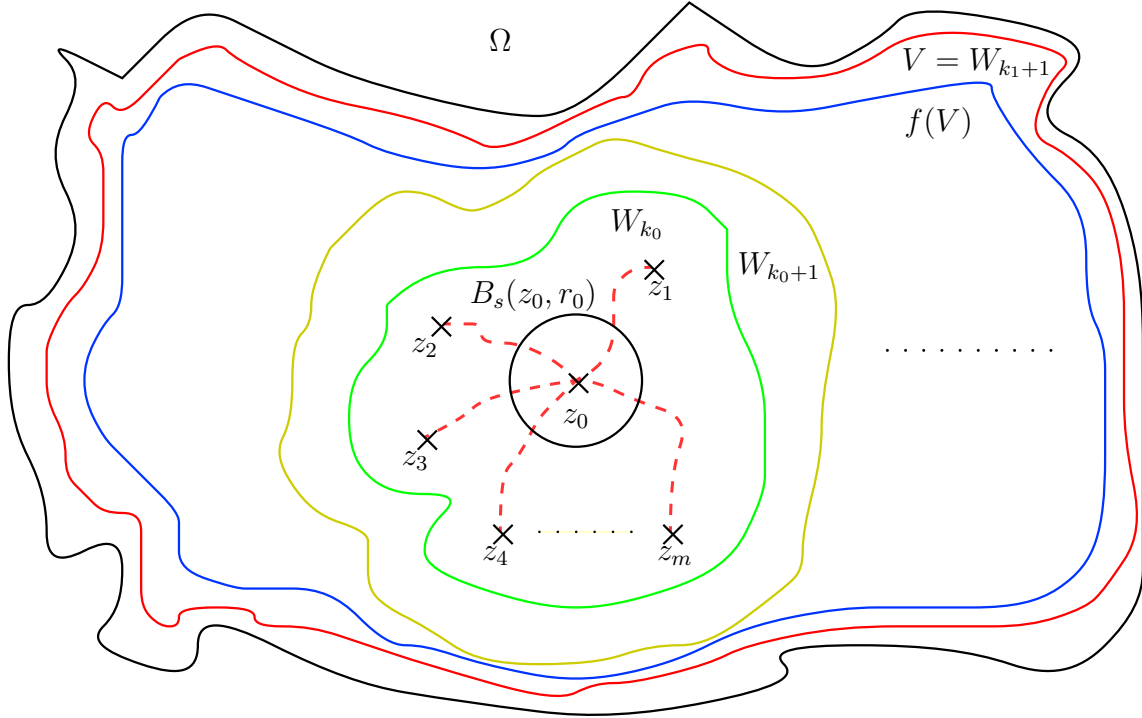
$$\gamma_i \subseteq W_{k_0}.$$

Damit hat W_k für alle $k \geq k_0$ folgende Eigenschaften:

- (i) $\overline{f(W_k)} \subseteq W_k$.

$$(ii) f^{-1}(W_k) \cap \Omega = W_{k+1}.$$

Insbesondere ist $f^{-1}(W_k) \cap \Omega$ zusammenhängend für alle $k \geq k_0$, sonst gäbe es ein Urbild von z_0 in Ω außerhalb von $W_{k_0} \subseteq W_{k+1}$.



Seien $\lambda > 1$ und $0 < r < 1$ die Parameter aus der ExpShrink-Eigenschaft von f . Da f nach der Definition von semihyperbolisch keine parabolischen Zyklen besitzt, häufen sich kritische Orbits in der Fatoumenge nicht bei der Juliamenge. Wir können annehmen, dass für alle $z \in \mathcal{J}$, $n \geq 0$ und Komponenten U von $f^{-n}(B_s(z, r))$

$$U \cap \text{Crit}_f \subseteq \mathcal{J}$$

gilt, wenn nötig verkleinern wir dazu r .

Die Menge $\{z \in \Omega : \delta(z, \partial\Omega) \geq \frac{r}{100}\}$ ist kompakt, das heißt, sie lässt sich mit endlich vielen W_k überdecken. Da $W_k \subseteq W_{k+1}$ gilt, existiert ein minimales $k_1 \geq k_0$, sodass ∂W_{k_1} in einer $r/100$ Umgebung von $\partial\Omega \subseteq \mathcal{J}$ enthalten ist. Setze dann

$$V := W_{k_1+1}.$$

Sei $V_n = f^{-n}(V) \cap \Omega = W_{k_1+n+1}$ und $n(z) = n_V(z)$ für alle Punkte $z \in \Omega$. Ist $n(z) > 0$ für ein $z \in \Omega$, dann gilt

$$f^{n(z)}(z) \in V \setminus f(V),$$

demnach gilt für alle $k > 0$

$$n^{-1}(k) = \{z \in \Omega : n(z) = k\} = V_k \setminus V_{k-1}.$$

Für alle $z \in \Omega \setminus f(V)$ konstruieren wir nun einen Weg $\gamma_z \subseteq \Omega$ ohne Selbstüberschneidungen, der z mit $f(V)$ verbindet.

Wähle für alle $z \in \overline{V} \setminus f(V)$ einen Weg minimaler sphärischer Länge $\gamma_z \subseteq \overline{V}$, der z mit $f(V)$ verbindet. Für alle $z \in \overline{V} \setminus f(V)$ gilt dann $\gamma_z \cap P(f) = \emptyset$. Da \overline{V} kompakt ist und der Rand von V glatt ist, sind die Wege so gewählt, dass eine obere Schranke $L > 0$ existiert, sodass für alle $z \in \overline{V}$

$$l_{qh}(\gamma_z) < L \tag{4.2.1}$$

gilt. Zum Beispiel

$$L > \max_{z \in \overline{V}} \frac{1}{\delta(z, \partial\Omega)} \max_{x, y \in \overline{V}} \min_{\gamma \subseteq \overline{V}} l_s(\gamma),$$

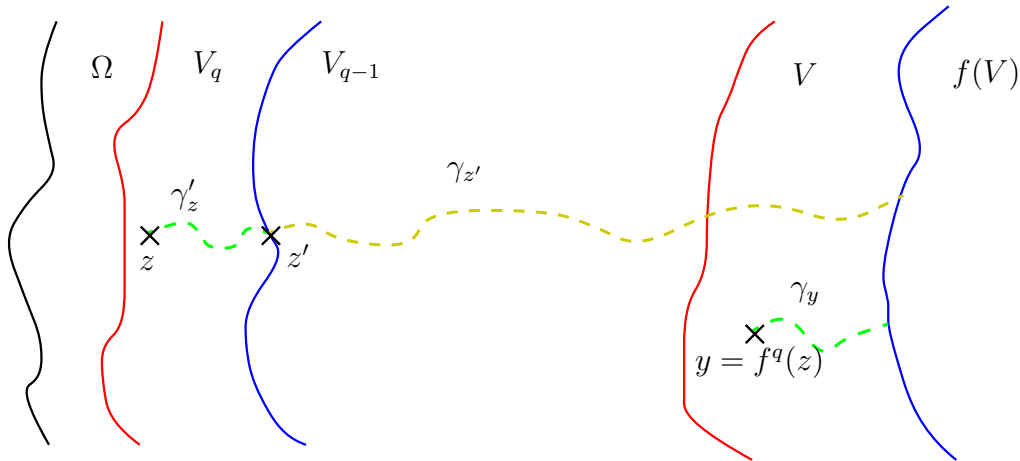
wobei γ ein Weg ist, der x mit y verbindet.

Sei $z \in \Omega \setminus \overline{V}$, dann setzen wir

$$q := \begin{cases} n(z), & \text{für } z \in V_{n(z)} \setminus \partial V_{n(z)-1}, \\ n(z) - 1, & \text{für } z \in \partial V_{n(z)-1}. \end{cases}$$

Sei $y = f^q(z)$ und γ'_z die Komponente von $f^{-q}(\gamma_y)$, sodass γ'_z der Weg ist, der z mit $z' \in \partial V_{q-1}$ verbindet. Wir definieren γ_z induktiv als die Hintereinanderausführung

$$\gamma_z = \gamma'_z \cdot \gamma_{z'}.$$



Im Folgenden sollen die Notationen $\gamma_z(k) = \gamma_z \cap \overline{V_k} \setminus V_{k-1}$ und $\gamma_z^k = \gamma_z \setminus V_{k-1}$ für alle $k = 0, \dots, n(z)$, mit $V_{-1} := f(V)$, benutzt werden. Für $z \in \Omega$ und $z' \in \gamma_z$ bezeichnen wir mit $\gamma_z^{z'}$ den Weg $\gamma' \subseteq \gamma$, der z mit z' verbindet.

Wir beweisen nun einige Ungleichungen, die wir später brauchen werden.

Sei $\gamma \subseteq \Omega \setminus f(V)$ ein Weg und γ' eine Komponente von $f^{-l}(\gamma)$ für ein $l > 0$. Nach der Wahl von r haben kritische Orbits in Ω mindestens den Abstand r zu \mathcal{J} . Für alle $z \in \Omega \setminus f(V)$ gilt außerdem $\delta(z, \partial\Omega) < \frac{r}{100}$, damit ist der Zweig f^{-l} , der γ auf γ' abbildet, univalent nach Lemma 3.1.3. Hiermit erfüllen γ , γ' und f die Voraussetzungen von Lemma 3.2.1.

Somit zeigt Lemma 3.2.1, dass die quasi-hyperbolische Länge von Wegen außerhalb von V durch Pullbacks nur durch eine absolute Konstante $K = K(r_1, r_2)$ vergrößert wird. Diese Konstante K hängt dabei von $r_1 = r$ und $r_2 = \frac{\pi}{2}$ ab, denn für alle $z \in \Omega \setminus f(V)$ gilt $\delta(z, \partial\Omega) < r$ und $\text{diam}_s U < 1$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle Komponenten U von $f^{-n}(B_s(z, \delta(z, \partial\Omega)))$ nach der ExpShrink-Bedingung.

Für $z \in \bar{V}$ gilt $l_{qh}(\gamma_z) \leq L$ und mit Lemma 3.2.1 und (4.2.1) folgt für alle $z \in \Omega \setminus \bar{V}$

$$\begin{aligned} l_{qh}(\gamma_z) &= l_{qh}(\gamma_z(q)) + l_{qh}(\gamma_z(q-1)) + \dots + l_{qh}(\gamma_z(1)) + l_{qh}(\gamma_z(0)) \\ &\leq q \cdot K \cdot L + l_{qh}(\gamma_z(0)) \\ &\leq q \cdot K \cdot L + L \\ &\leq n(z) \cdot K \cdot L + L. \end{aligned}$$

Das bedeutet, für $z \in \Omega$ gilt

$$l_{qh}(\gamma_z) \lesssim n(z). \quad (4.2.2)$$

Sei $z \in \Omega \setminus V$. Dann ist $y = f^{n(z)}(z) \in V \setminus f(V)$ und damit gilt $\delta(y, \partial\Omega) < r/100$ nach Konstruktion von V . Sei $a \in \mathcal{J}$ mit minimalem Abstand zu y und sei W die Komponente von $f^{-n(z)}(B_s(a, r))$, die z enthält. Dann gilt mit der ExpShrink-Eigenschaft

$$\delta(z, \partial\Omega) \leq \text{diam}_s W \leq \lambda^{-n(z)},$$

da $z \in W$ und $\bar{W} \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$ gilt. Also gilt

$$\delta(z, \partial\Omega) \leq \lambda^{-n(z)}. \quad (4.2.3)$$

Da $\delta(z, \partial\Omega) \leq \pi$ für alle $z \in \Omega$ gilt, folgt für alle $z \in \Omega$

$$\delta(z, \partial\Omega) \leq \pi \lambda^{-n(z)}.$$

Daraus folgt für alle $z \in \Omega$

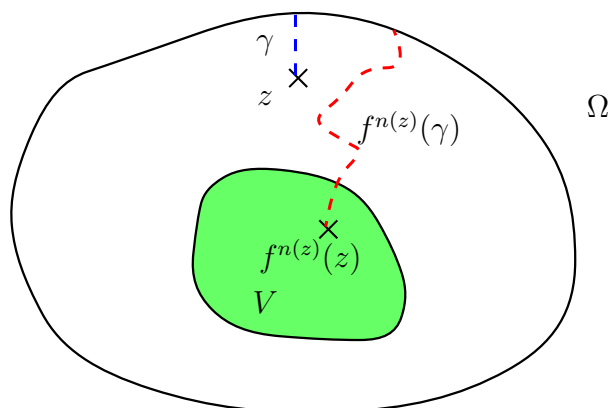
$$n(z) \lesssim -\log \delta(z, \partial\Omega). \quad (4.2.4)$$

Außerdem gilt für alle $z \in \Omega$

$$\delta(\partial V, \partial\Omega) \cdot \|f^*\|_\infty^{-n(z)} \leq \delta(z, \partial\Omega),$$

denn sei γ eine Kurve minimaler sphärischer Länge, die z mit $\partial\Omega$ verbindet, so gilt mit der Kettenregel (Lemma 2.1.13)

$$\begin{aligned}
 \delta(z, \partial\Omega) \cdot \|f^*\|_\infty^{n(z)} &= l_s(\gamma) \cdot \sup_{x \in \Omega} (f^*(x))^{n(z)} \\
 &\geq l_s(\gamma) \cdot \sup_{x \in \Omega} \prod_{i=0}^{n(z)-1} f^*(f^i(x)) \\
 &= l_s(\gamma) \cdot \|(f^{n(z)})^*\|_\infty \\
 &\geq l_s(f^{n(z)}(\gamma)) \\
 &\geq \delta(f^{n(z)}(z), \partial\Omega) \\
 &\geq \delta(\partial V, \partial\Omega).
 \end{aligned}$$



Daraus folgt

$$-\log \delta(z, \partial\Omega) \lesssim n(z). \quad (4.2.5)$$

Verbindet man die Ungleichungen (4.2.4) und (4.2.5), erhält man für alle $z \in \Omega$

$$-\log \delta(z, \partial\Omega) \approx n(z). \quad (4.2.6)$$

Lemma 4.2.1 *Es existiert ein $n_0 > 0$, sodass*

$$l_s(\gamma_z^{n_0}) \leq \frac{r}{100}$$

für alle $z \in \Omega$ gilt.

Beweis: Benutzt man die Ungleichung (4.2.3), erhält man für alle $z \in \Omega \setminus V$ und alle

$$0 \leq k \leq n(z)$$

$$\begin{aligned} l_{qh}(\gamma_z(k)) &= \int_{\gamma_z(k)} \frac{1}{\delta(\xi, \partial\Omega)} |d\sigma(\xi)| \\ &\geq \int_{\gamma_z(k)} \frac{1}{\lambda^{-n(\xi)}} |d\sigma(\xi)| \\ &\geq \lambda^k \int_{\gamma_z(k)} |d\sigma(\xi)| \\ &= \lambda^k \cdot l_s(\gamma_z(k)). \end{aligned}$$

Benutzt man Lemma 3.2.1 und Ungleichung (4.2.1), dann erhält man für alle $z \in \Omega \setminus V$ und $0 \leq k \leq n(z)$

$$l_{qh}(\gamma_z(k)) \leq K \cdot l_{qh}(\gamma_z(0)) \leq K \cdot L.$$

Aus den letzten beiden Ungleichungen folgt

$$l_s(\gamma_z(k)) \leq \lambda^{-k} \cdot l_{qh}(\gamma_z(k)) \leq \lambda^{-k} \cdot K \cdot L.$$

Hieraus folgt mit Summation

$$l_s(\gamma_z^k) = \sum_{i=k}^{n(z)} l_s(\gamma_z(i)) \leq \sum_{i=k}^{n(z)} (\lambda^{-i} \cdot K \cdot L) = K \cdot L \cdot \sum_{i=k}^{n(z)} \lambda^{-i}. \quad (4.2.7)$$

Nach dem Cauchy-Kriterium existiert ein $n_0 > 0$, sodass $K \cdot L \cdot \sum_{i=n_0}^{n(z)} \lambda^{-i} \leq r/100$ für alle $z \in \Omega$ gilt, dann folgt mit (4.2.7)

$$l_s(\gamma_z^{n_0}) \leq \frac{r}{100},$$

wobei wir $l_s(\gamma_z^{n_0}) = 0$ setzen, wenn $n(z) < n_0$ gilt. \square

Lemma 4.2.2 Für alle $\eta > 0$ existiert ein $M(\eta) > 0$, sodass, wenn $z \in \Omega$ und $z' \in \gamma_z$ mit $n(z') \leq n_0$, Folgendes gilt:

$$l_{qh}(\gamma_z^{z'}) \geq M(\eta) \Rightarrow \delta(z, \partial\Omega) \leq \eta \cdot \delta(z', \partial\Omega)$$

Beweis: Sei $z \in \Omega$, $z' \in \gamma_z$ mit $n(z') \leq n_0$. Aus (4.2.2) und (4.2.6) folgt, dass $C_1, C_2, C_3 > 0$ und $D_1, D_2, D_3 > 0$ existieren mit

$$\begin{aligned} l_{qh}(\gamma_z) &\leq C_1 \cdot n(z) + D_1, \\ \delta(z', \partial\Omega) &\geq e^{-C_2 \cdot n(z') - D_2}, \\ \delta(z, \partial\Omega) &\leq e^{-C_3 \cdot n(z) - D_3}. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Setze $M(\eta) := C_1 \cdot \frac{C_2 \cdot n_0 + \log \frac{1}{\eta} + D_2 - D_3}{C_3} + D_1$.

Es sei nun

$$l_{qh}(\gamma_z^{z'}) \geq M(\eta).$$

Dann gilt $M(\eta) \leq l_{qh}(\gamma_z^{z'}) \leq C_1 \cdot n(z) + D_1$, also

$$n(z) \geq \frac{M(\eta) - D_1}{C_1} = \frac{C_2 \cdot n_0 + \log \frac{1}{\eta} + D_2 - D_3}{C_3}.$$

Mit $n(z') \leq n_0$ folgt

$$n(z) \geq \frac{C_2 \cdot n(z') + \log \frac{1}{\eta} + D_2 - D_3}{C_3}.$$

Durch Umformen erhalten wir

$$\log \eta \geq -C_3 \cdot n(z) - D_3 + C_2 \cdot n(z') + D_2$$

und mit den Ungleichungen (4.2.8) folgt daraus

$$\eta \geq \frac{\delta(z, \partial\Omega)}{\delta(z', \partial\Omega)}.$$

Damit gilt

$$\eta \cdot \delta(z', \partial\Omega) \geq \delta(z, \partial\Omega).$$

□

Wir fahren nun im Beweis des Theorems fort. Als Nächstes wollen wir Lemma 3.5.2 anwenden.

Seien $z_1 \in \Omega \setminus V_{n_0}$ und $w, w' \in \Omega \setminus V_{n_0}$, sodass $\gamma_w^{w'} \subseteq \gamma_{z_1}$ mit $l_{qh}(\gamma_w^{w'}) \geq K \cdot M(\eta)$ gilt, wobei $M(\eta)$ aus Lemma 4.2.2 stammt und von einem η abhängt, welches wir allerdings erst später genau bestimmen werden.

Es bleibt noch

$$\delta(w, \partial\Omega) \leq \frac{1}{2} \cdot \delta(w', \partial\Omega)$$

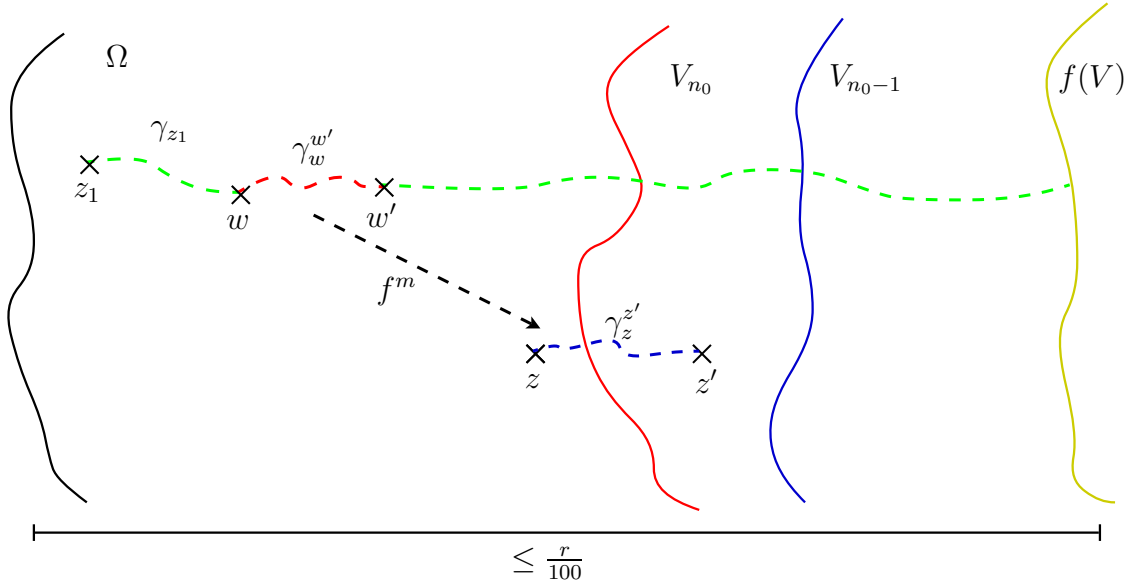
zu zeigen. Dazu nutzen wir Lemma 4.2.2 und die folgende Konstruktion.

Sei $m := n(w') - n_0$, also $m > 0$ nach Wahl von w' . Sei dann $z := f^m(w)$, $z' := f^m(w')$.

Dann gilt nach Konstruktion $n(z) \geq n(z') = n(f^m(w')) = n_0$ und

$$\gamma_z^{z'} = f^m(\gamma_w^{w'}).$$

Außerdem gilt $\delta(z', \partial\Omega) < \frac{r}{100}$, da $z' \in \Omega \setminus f(V)$, und $l_s(\gamma_z^{z'}) \leq l_s(\gamma_z^{n_0}) \leq \frac{r}{100}$.



Darüber hinaus gilt wegen der Wahl von $\gamma_w^{w'}$ und Lemma 3.2.1

$$K \cdot M(\eta) \leq l_{qh}(\gamma_w^{w'}) \leq K \cdot l_{qh}(\gamma_z^{z'})$$

und damit folgt

$$l_{qh}(\gamma_z^{z'}) \geq M(\eta).$$

Dadurch gilt dann mit Lemma 4.2.2

$$\delta(z, \partial\Omega) < \eta \cdot \delta(z', \partial\Omega). \quad (4.2.9)$$

Lemma 4.2.3 *Seien w, w', z, z', m wie eben gewählt und konstruiert. Gilt $\delta(z, \partial\Omega) < \eta \cdot \delta(z', \partial\Omega)$ für ein genügend kleines $\eta > 0$, so folgt*

$$\delta(w, \partial\Omega) \leq \frac{1}{2} \cdot \delta(w', \partial\Omega). \quad (4.2.10)$$

Beweis: Sei $x \in \partial\Omega \subseteq \mathcal{J}$ mit $\delta(x, z) = \delta(z, \partial\Omega)$. Sei U die Komponente von $f^{-m}(B_s(x, r))$, die w und w' enthält. Seien $B_0 := B_s(z, \delta(z, \partial\Omega))$, $B_1 := B_s(z, r/8)$, $B_2 := B_s(z', r/4)$, $B_3 := B_s(z', r/2)$, dann gilt $B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset B_s(x, r)$, da $\delta(z, \partial\Omega) \leq \frac{r}{100}$ und $\delta(z, z') \leq \frac{r}{100}$ gilt. Weiter seien U_0, U_1, U_2, U_3 die jeweiligen Pullbacks über f^{-m} , sodass $w \in U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset U$ gilt. Nach Bemerkung 3.4.4 gilt, dass U, U_0, U_1, U_2, U_3 einfach zusammenhängend sind und dass $\text{diam}_s U < 1$ gilt. Hierzu muss r möglicherweise verkleinert werden.

Nach der Definition von semihyperbolisch existiert ein $N \geq 1$, sodass

$$\deg(f^m|_U) \leq N$$

gilt. Mit Lemma 3.3.2, (4.2.9) und $\text{diam}_s U_1 \leq \text{diam}_s U_2$ folgt

$$\begin{aligned} \delta(w, \partial\Omega) &\leq \text{diam}_s U_0 \\ &< 64 \cdot \left(\frac{8\delta(z, \partial\Omega)}{r}\right)^{\frac{1}{N}} \cdot \text{diam}_s U_1 \\ &< 64 \cdot \eta^{\frac{1}{N}} \cdot \left(\frac{8\delta(z', \partial\Omega)}{r}\right)^{\frac{1}{N}} \cdot \text{diam}_s U_2. \end{aligned}$$

Da $\delta(z', \partial\Omega) < \frac{r}{100}$ gilt, gilt insbesondere $8\delta(z', \partial\Omega) < r$ und daraus folgt

$$\delta(w, \partial\Omega) < 64 \cdot \eta^{\frac{1}{N}} \text{diam}_s U_2. \quad (4.2.11)$$

Nach Lemma 3.3.1 gilt

$$\text{mod}(U_3 \setminus U_2) > \frac{\log 2}{2\pi N}$$

und damit existiert nach Lemma 3.3.3 ein $d > 0$, das nur von N abhängt, sodass

$$D := B_s(w', d \cdot \text{diam}_s U_2) \subseteq U_3$$

gilt. Verkleinere d wenn nötig, sodass auch $d \cdot \text{diam}_s U_2 < 1$ gilt.

Sei $\theta = \frac{2\beta\delta(z', \partial\Omega)}{r}$, wobei β aus dem Lemma 3.2.3 kommt. Es folgt $\theta \leq \beta/2$, da $\delta(z', \partial\Omega) < \frac{r}{100}$. Außerdem ist θ nach unten beschränkt durch ein $\theta_0 > 0$, da $n(z') = n_0$ und $\overline{V_{n_0}} \subset \Omega$. Dann gilt mit Lemma 3.2.3 und $D \subseteq U_3$

$$\begin{aligned} B_s(w', \beta\theta d \cdot \text{diam}_s U_2) &\subseteq \{\zeta \in D : d_D(w', \zeta) < \theta\} \\ &\subseteq \{\zeta \in U_3 : d_{U_3}(w', \zeta) < \theta\}. \end{aligned}$$

Es folgt mit dem Lemma von Schwarz (Satz 2.6.7), $r/2 < 1$ und der Definition von θ

$$\begin{aligned} f^m(B_s(w', \beta\theta d \cdot \text{diam}_s U_2)) &\subseteq f^m(\{\zeta \in U_3 : d_{U_3}(w', \zeta) < \theta\}) \\ &\subseteq \{\zeta \in B_3 : d_{B_3}(z', \zeta) < \theta\} \\ &\subseteq B_s(z', \beta^{-1}\theta \frac{r}{2}) \\ &= B_s(z', \delta(z', \partial\Omega)). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\beta\theta d \cdot \text{diam}_s U_2 \leq \delta(w', \partial\Omega), \quad (4.2.12)$$

denn wäre $\delta(w', \partial\Omega) < \beta\theta d \cdot \text{diam}_s U_2$, so wäre $B_s(w', \beta\theta d \cdot \text{diam}_s U_2) \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$ und damit auch $f^m(B_s(w', \beta\theta d \cdot \text{diam}_s U_2)) \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$. Es gilt aber $B_s(z', \delta(z', \partial\Omega)) \cap \mathcal{J} = \emptyset$, das wäre ein Widerspruch zu $f^m(B_s(w', \beta\theta d \cdot \text{diam}_s U_2)) \subseteq B_s(z', \delta(z', \partial\Omega))$.

Aus den beiden Ungleichungen (4.2.11) und (4.2.12) folgt

$$\delta(w, \partial\Omega) < 64 \cdot \eta^{\frac{1}{N}} \text{diam}_s U_2 \leq \frac{64 \cdot \eta^{\frac{1}{N}}}{\beta\theta d} \delta(w', \partial\Omega) \leq \frac{64 \cdot \eta^{\frac{1}{N}}}{\beta\theta_0 d} \delta(w', \partial\Omega).$$

Wählt man nun η beziehungsweise $M(\eta)$ so, dass $\frac{64 \cdot \eta^{\frac{1}{N}}}{\beta\theta_0 d} \leq \frac{1}{2}$ gilt, erhält man Ungleichung (4.2.10). \square

Damit haben wir alle Voraussetzungen für Lemma 3.5.2 erfüllt. Mit Lemma 3.5.2 und der Bemerkung danach folgt nun direkt, dass Ω ein John-Gebiet ist, da $\overline{V_{n_0}}$ ein Kontinuum ist. Wir haben gezeigt, dass jede periodische Fatoukomponente ein John-Gebiet ist. Da f als rationale Funktion einen endlichen Grad besitzt, existieren nach Satz 2.4.16 nur endlich viele solcher Komponenten. Daher ist es ausreichend, zu zeigen, dass Pullbacks einer attraktiven Fatoukomponente Ω John-Gebiete sind. Diese Aussage liefert eigentlich bereits Lemma 3.4.4, jedoch wollen wir mit Hilfe unserer Konstruktion noch mehr über die John-Konstante aussagen. Dies wird uns später den Beweis von Satz 4.2.5 ermöglichen.

Sei also Ω' eine solche Komponente mit $f^p(\Omega') = \Omega$ und V'_{n_0} die Komponente von $f^{-p}(V_{n_0})$ mit $V'_{n_0} \subseteq \Omega'$ sowie $f(V)'$ die Komponente von $f^{-p}(f(V))$ mit $f(V)' \subseteq V'_{n_0}$. Für $w \in \Omega' \setminus f(V)'$ sei $y = f^p(w)$ und γ_w die Komponente von $f^{-p}(\gamma_y)$, die w enthält. γ_w verbindet w mit $f(V)'$ in Ω' .

Seien also $z_1, w, w' \in \Omega' \setminus V'_{n_0}$ mit $\gamma_w^{w'} \subseteq \gamma_{z_1}$, $l_{qh}(\gamma_w^{w'}) \geq K \cdot M(\eta)$ und $y = f^p(w)$, $y' = f^p(w')$. Setze $m = n(y') - n_0$. Seien $z = f^m(y)$ und $z' = f^m(y')$ mit $n(z') = n_0$. Dann ist $\gamma_z^{z'} = f^{m+p}(\gamma_w^{w'})$. Wieder folgt mit Lemma 3.2.1

$$K \cdot M(\eta) \leq l_{qh}(\gamma_w^{w'}) \leq K \cdot l_{qh}(\gamma_z^{z'}) \Rightarrow l_{qh}(\gamma_z^{z'}) \geq M(\eta).$$

Mit Lemma 4.2.2 gilt dann

$$\delta(z, \partial\Omega) < \eta \cdot \delta(z', \partial\Omega).$$

Damit sind alle Voraussetzungen von Lemma 4.2.3 erfüllt, und wir erhalten

$$\delta(w, \partial\Omega) \leq \frac{1}{2} \cdot \delta(w', \partial\Omega).$$

Daher folgt wieder mit Lemma 3.5.2 und der Bemerkung danach, dass Ω' ein John-Gebiet ist. \square

Carleson, Jones und Yoccoz haben in [8] gezeigt, dass die Aussagen in Theorem 2 für Polynome äquivalent sind. Der folgende Satz zeigt, dass im Fall rationaler Abbildungen die Umkehrung des Theorems 2 im Allgemeinen nicht gilt.

Satz 4.2.4 *Es existiert eine rationale nicht semihyperbolische Funktion, deren Fatoukomponenten John-Gebiete sind.*

Beweis: [30, Korollar 4.4] liefert eine rationale Abbildung g vom Grad zwei, die zwei invariante Siegelscheiben Δ^0 und Δ^∞ besitzt, sodass $\partial\Delta^0$ und $\partial\Delta^\infty$ disjunkte Quasikreise sind, die einen kritischen Punkt c_0 beziehungsweise c_∞ enthalten.

$\partial\Delta^0$ und $\partial\Delta^\infty$ sind invariant unter Vorwärtsiteration, da g eine eigentliche Abbildung ist. Deshalb, und weil g nur diese beiden kritischen Punkte besitzt, sind die Orbits von c_0 und c_∞ nach Satz 2.4.18 dicht in $\partial\Delta^0$ beziehungsweise $\partial\Delta^\infty$. Das heißt, beide kritischen Punkte sind rekurrent und g ist somit nicht semihyperbolisch.

Nach Satz 2.4.16 kann es keine anziehenden Fatoukomponenten geben und nach Satz 2.4.17 kann es keine parabolischen Fatoukomponenten geben. Herman-Ringe können ebenfalls nicht auftreten, denn nach Satz 2.4.18 ist der einzige Fall, in dem es einen Herman-Ring geben kann, der, dass die beiden Komponenten des Komplements des Ringes genau $\overline{\Delta^0}$ und $\overline{\Delta^\infty}$ sind. Das ist ausgeschlossen, da die Siegelscheiben echt präperiodische Urbilder besitzen, weil g Grad zwei hat. Damit sind nach der Klassifikation periodischer Fatoukomponenten (Satz 2.4.11) alle Fatoukomponenten Urbilder von Δ^0 oder Δ^∞ .

Nach Lemma 3.1.3 sind alle Fatoukomponenten einfach zusammenhängend. Δ^0 und Δ^∞ sind also Quasischeiben, da $\partial\Delta^0$ und $\partial\Delta^\infty$ Quasikreise sind. Nach Lemma 2.8.9 sind Quasischeiben insbesondere John-Gebiete und nach Lemma 3.5.7 sind Urbilder von John-Gebieten unter rationalen Abbildungen ebenfalls John-Gebiete. Damit sind alle Fatoukomponenten John-Gebiete. \square

Aus dem Beweis von Theorem 2 lässt sich das folgende Korollar gewinnen.

Korollar 4.2.5 (Gleichmäßige John-Konstante) *Sei f eine rationale, semihyperbolische Abbildung mit zusammenhängender Juliamenge. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass jede Fatoukomponente von f ein ε -John-Gebiet ist.*

Beweis: Sei U eine Fatoukomponente von f . Da die Juliamenge zusammenhängend ist, sind alle Fatoukomponenten einfach zusammenhängend. Nach Lemma 3.1.3 gibt es nur endlich viele Fatoukomponenten, auf denen f nicht univalent ist, da jede dieser Fatoukomponenten mindestens einen kritischen Punkt enthalten muss und f nur endlich viele kritische Punkte besitzt.

Nach Theorem 2 sind alle attraktiven Fatoukomponenten und alle Fatoukomponenten, auf denen f nicht univalent ist, John-Gebiete. Da es von beiden nur endlich viele gibt, existiert ein $\varepsilon' > 0$, sodass diese Komponenten alle ε' -John-Gebiete sind. Es bleibt also zu zeigen, dass univalente Pullbacks einer attraktiven Fatoukomponente Ω uniforme John-Gebiete sind. Wir können also annehmen, dass mindestens zwei Fatoukomponenten existieren. Sei dann $\tau > 0$ so gewählt, dass zwei Fatoukomponenten existieren, die beide einen sphärischen Ball mit Radius τ enthalten.

Wir benutzen die Bezeichnungen aus dem Beweis von Theorem 2. Nehmen wir an, dass $f^p : \Omega' \rightarrow \Omega$ univalent ist. Nach der Bemerkung zu Lemma 3.5.2 hängt die Uniformität der John-Konstante von Schranken für

$$K \cdot M(\eta), \text{diam}_{qh} V' \text{ und } \frac{\min_{z \in \overline{V'}} \delta(z, \partial\Omega')}{\max_{z \in \overline{V'}} \delta(z, \partial\Omega')}$$

ab. Nach dem Beweis von Theorem 2 hängt $K \cdot M(\eta)$ nicht von der Wahl von Ω' ab.

Da f^p univalent ist, gilt Lemma 3.2.1 für alle $z \in \Omega$. Demnach existiert nach Lemma 3.2.1 ein K' , das nur von ε abhängt, mit $\text{diam}_{qh} V' \leq K' \cdot \text{diam}_{qh} V_{n_0}$. Das heißt, $\text{diam}_{qh} V'$ ist uniform beschränkt, unabhängig von der Wahl von Ω' .

Um den Beweis zu vervollständigen, zeigen wir, dass es eine untere Schranke $R > 0$ gibt, die nur von Ω und V_{n_0} abhängt, sodass für alle $w, w' \in V'$

$$\frac{\delta(w, \partial\Omega')}{\delta(w', \partial\Omega')} \geq R \quad (4.2.13)$$

gilt.

Seien dazu g der Zweig von f^{-p} , der Ω auf Ω' abbildet, und $w, w' \in V'$, $z, z' \in \Omega$ mit $g(z) = w$ und $g(z') = w'$. Dann ist g univalent. Sei C die Koebe-Konstante, die nur von ε abhängt. Sei außerdem $0 < \varrho < 1$ aus dem Satz von Koebe für die Sphäre (Satz 3.1.1) so gewählt, dass $\frac{C}{(1-\varrho)^3} \leq 2C$ und $\frac{1-\varrho}{C} \geq \frac{1}{2C}$ gilt, zum Beispiel $\varrho := 1/10$. Wir überdecken $\overline{V_{n_0}}$ mit m Bällen der Form $B_s(x_i, r_i)$, sodass für alle $i = 1, \dots, m$

$$r_i \leq \varrho \cdot \delta(x_i, \partial\Omega)$$

gilt. Sei $i \in \{1, \dots, m\}$, dann gilt für $y, y' \in B_s(x_i, r_i)$ mit dem Satz von Koebe

$$\left| \frac{g^*(y)}{g^*(y')} \right| = \left| \frac{g^*(y)}{g^*(x_i)} \right| \cdot \left| \frac{g^*(x_i)}{g^*(y')} \right| \geq \frac{1}{(2C)^2}.$$

Daraus folgt

$$\left| \frac{g^*(z)}{g^*(z')} \right| \geq \frac{1}{(2C)^{2m}}.$$

Setze

$$S := \inf_{z, z' \in V_{n_0}} \frac{\delta(z, \partial\Omega)}{\delta(z', \partial\Omega)}.$$

Wendet man den Satz von Koebe auf $g|_{B_s(z, \delta(z, \partial\Omega))}$ an, erhält man

$$\delta(g(z), \partial\Omega') \geq \frac{1}{C} |g^*(z)| \cdot \delta(z, \partial\Omega).$$

Ebenso erhält man, wenn man den Satz von Koebe auf $g^{-1}|_{B_s(g(z'), \delta(g(z'), \partial\Omega')}$ anwendet,

$$\begin{aligned}\delta(z', \partial\Omega) &\geq \frac{1}{C} |(g^{-1})^*(g(z'))| \cdot \delta(g(z'), \partial\Omega') \\ &= \frac{1}{C} \frac{1}{|g^*(z')|} \cdot \delta(g(z'), \partial\Omega').\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\delta(g(z'), \partial\Omega') \leq C |g^*(z')| \cdot \delta(z', \partial\Omega).$$

Damit folgt

$$\frac{\delta(w, \partial\Omega')}{\delta(w', \partial\Omega')} = \frac{\delta(g(z), \partial\Omega')}{\delta(g(z'), \partial\Omega')} \geq \frac{\frac{1}{C} |g^*(z)| \cdot \delta(z, \partial\Omega)}{C |g^*(z')| \cdot \delta(z', \partial\Omega)} \geq \frac{1}{C^2 \cdot (2C)^{2m}} \cdot S.$$

Setze also R in Ungleichung (4.2.13) als

$$R := \frac{1}{4^m C^{2(m+1)}} \cdot S.$$

Da es nur endlich viele attraktive Fatoukomponenten gibt, haben wir nun gezeigt, dass ein $\varepsilon'' > 0$ existiert, sodass alle univalenten Pullbacks einer attraktiven Fatoukomponente ε'' -John-Gebiete sind. Damit existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass alle Fatoukomponenten ε -John-Gebiete sind. \square

Bemerkung 4.2.6 Aus dem Beweis geht hervor, dass die Voraussetzung, dass die Julia-menge zusammenhängend sein muss, abgeschwächt werden kann. Es reicht aus, wenn f nur endlich viele Fatoukomponenten besitzt, auf denen f nicht univalent ist.

4.3 Lokaler Zusammenhang der Juliamenge

Neben Theorem 3 beweisen wir hier auch, dass für den lokalen Zusammenhang der Julia-menge Semihyperbolizität nicht notwendig ist, es reicht aus, wenn die Funktion SumShrink erfüllt.

Bemerkung 4.3.1 Für alle rationalen, semihyperbolischen Abbildungen haben wir in Theorem 2 gezeigt, dass alle Fatoukomponenten John-Gebiete sind. Damit sind sie nach Bemerkung 2.8.18 auch Hölder-Gebiete. Nach Lemma 2.8.15 und dem Satz von Carathéodory (Satz 2.9.2) sind damit die Ränder aller Fatoukomponenten lokal zusammenhängend. Hieraus darf man jedoch nicht einfach schließen, dass die Juliamenge lokal zusammenhängend ist, da es im Allgemeinen unendlich viele Fatoukomponenten gibt. Um dieses Problem zu umgehen ist die Beweisidee des Satzes 3.6.1 hilfreich, wie wir im nächsten Theorem sehen werden.

Theorem 3 *Ist die Juliamenge einer rationalen, semihyperbolischen Abbildung zusammenhängend, so ist sie lokal zusammenhängend. Darüber hinaus existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass die Juliamenge die Definition des lokalen Zusammenhangs mit $\theta = \varepsilon\tau$ erfüllt.*

Beweis: Da die Juliamenge zusammenhängend ist, ist jede Fatoukomponente einfach zusammenhängend. Nach Korollar 4.2.5 existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass jede Fatoukomponente ein ε -John-Gebiet ist.

Sei $\tau > 0$ und $a, b \in \mathcal{J}$ mit $\delta(a, b) < \theta := \varepsilon\tau$. Wir konstruieren nun ein Kontinuum $C \subseteq \mathcal{J}$, das a und b enthält mit

$$\text{diam}_s C < \tau, \quad (4.3.1)$$

damit ist \mathcal{J} lokal zusammenhängend nach Definition.

Wir nutzen nun eine ähnliche Konstruktion wie schon im Beweis zu Satz 3.6.1.

Sei $E = \partial([a, b] \cap \mathcal{J})$, versehen mit der Topologie der reellen Achse und $B = [a, b] \setminus E$. Dann ist E kompakt mit leerem Inneren, dadurch ist B dicht und offen in $[a, b]$. Für jede Komponente I von B gilt $\partial I \subseteq \mathcal{J}$ und entweder $I \subseteq \mathcal{J}$ oder $I \cap \mathcal{J} = \emptyset$.

(i) Ist $I \subseteq \mathcal{J}$, so definieren wir

$$C(I) = \bar{I}.$$

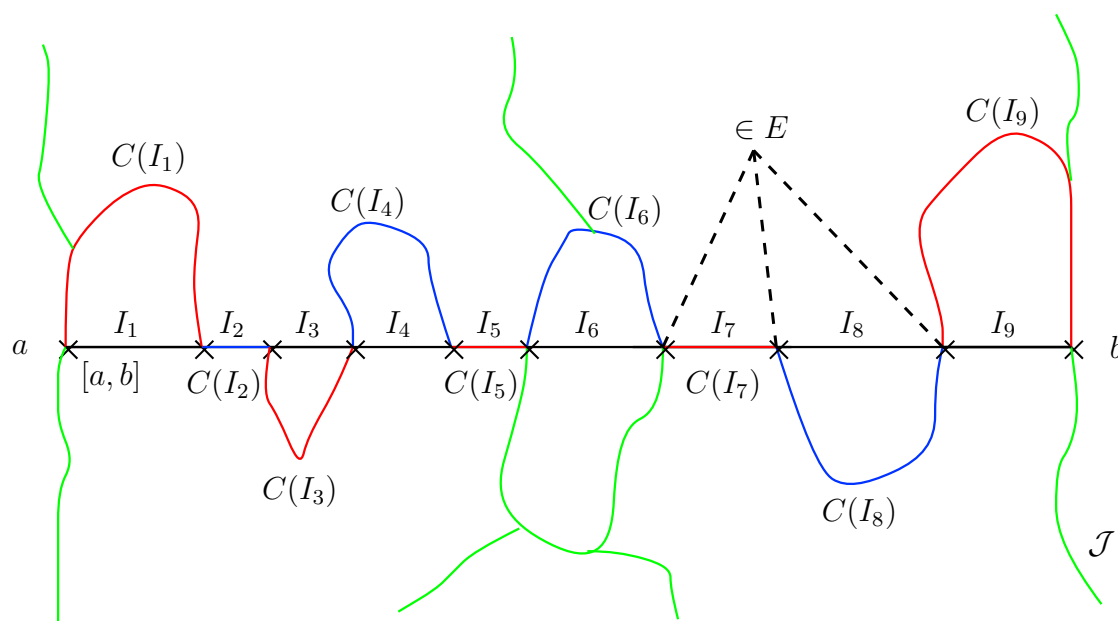
(ii) Ist $I \cap \mathcal{J} = \emptyset$, dann ist \bar{I} ein Querschnitt einer Fatoukomponente U . Sei D die Komponente von $U \setminus [a, b]$ mit kleinerem Durchmesser. Dann definieren wir

$$C(I) = \partial D \setminus I.$$

In beiden Fällen ist $C(I) \subseteq \mathcal{J}$ ein Kontinuum, das ∂I enthält und für das Folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \text{diam}_s C(I) &\leq \text{diam}_s I \leq \varepsilon^{-1} \text{diam}_s I, & \text{da } \varepsilon \leq 1. \\ \text{(ii)} \quad \text{diam}_s C(I) &\leq \text{diam}_s D \leq \varepsilon^{-1} \text{diam}_s I, & \text{mit Lemma 3.5.5.} \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Sei $(I_n)_{n \geq 0}$ eine Folge, die jede Komponente von B genau einmal enthält.



Sei

$$C' = E \cup \bigcup_{n \geq 0} C(I_n)$$

und

$$C = \overline{C'} \subseteq \mathcal{J}.$$

Dann ist C' mit demselben Argument wie im Beweis des Kriteriums für lokalen Zusammenhang (Satz 3.6.1) zusammenhängend, damit ist C ein Kontinuum.

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\text{diam}_s C' \leq \varepsilon^{-1} \delta(a, b)$$

gilt, denn dann folgt mit $\text{diam}_s C = \text{diam}_s C'$ und $\delta(a, b) < \varepsilon \tau$, dass Ungleichung (4.3.1) erfüllt ist.

Es gilt $\text{diam}_s C' = \text{diam}_s(C' \setminus E)$, nach Konstruktion von E . Damit reicht es aus zu zeigen, dass für $x \in C(I_n)$ und $y \in C(I_m)$ mit $n, m \geq 0$

$$\delta(x, y) \leq \varepsilon^{-1} \delta(a, b)$$

gilt.

Sei $\{x_1, x_2\} = \partial I_n$ und $\{y_1, y_2\} = \partial I_m$.

Ist $n = m$, so gilt mit Ungleichung (4.3.2)

$$\delta(x, y) \leq \text{diam}_s C(I_n) \leq \varepsilon^{-1} \text{diam}_s I_n \leq \varepsilon^{-1} \delta(a, b).$$

Für den Fall $n \neq m$ können wir annehmen, dass $a \leq x_1 < x_2 \leq y_1 < y_2 \leq b$ gilt. Wieder mit der Ungleichung (4.3.2) folgt

$$\delta(x, x_2) \leq \varepsilon^{-1} \delta(x_1, x_2) \text{ und } \delta(y_1, y) \leq \varepsilon^{-1} \delta(y_1, y_2).$$

Da $[a, b]$ eine sphärische Geodätische ist und $\varepsilon^{-1} \geq 1$ gilt, folgt daraus

$$\begin{aligned} \delta(x, y) &= \delta(x, x_2) + \delta(x_2, y_1) + \delta(y_1, y) \\ &\leq \varepsilon^{-1} \delta(x_1, x_2) + \delta(x_2, y_1) + \varepsilon^{-1} \delta(y_1, y_2) \\ &\leq \varepsilon^{-1} \delta(x_1, x_2) + \varepsilon^{-1} \delta(x_2, y_1) + \varepsilon^{-1} \delta(y_1, y_2) \\ &= \varepsilon^{-1} \delta(x_1, y_2) \\ &\leq \varepsilon^{-1} \delta(a, b). \end{aligned}$$

□

Das letzte Theorem zeigt, dass eine zusammenhängende Juliamenge einer rationalen, semihyperbolischen Funktion in einem stärkeren Sinn lokal zusammenhängend ist. Erfüllt die Abbildung SumShrink anstelle der Semihyperbolizität, so zeigt der nächste Satz, dass dann die Juliamenge immer noch im üblichen Sinne lokal zusammenhängend ist.

Satz 4.3.2 (SumShrink impliziert lokalen Zusammenhang) *Ist die Juliamenge einer rationalen SumShrink-Abbildung zusammenhängend, so ist sie lokal zusammenhängend.*

Beweis: Sei f eine rationale, SumShrink-Abbildung. Ist $\mathcal{J} = \overline{\mathbb{C}}$, so ist nichts zu beweisen. Nehmen wir daher an, dass die Fatoumenge von f nicht leer ist. Wie in Lemma 3.4.3 gezeigt, besteht die Fatoumenge aus attraktiven periodischen Komponenten und deren Urbildern. Die Juliamenge ist nach Voraussetzung zusammenhängend und damit ist jede Fatoukomponente einfach zusammenhängend. Aus Lemma 2.9.6 folgt, dass die Ränder der periodischen Fatoukomponenten lokal zusammenhängend sind. Als Pullbacks von lokal zusammenhängenden Kompakta unter rationalen Abbildungen sind damit die Ränder aller Fatoukomponenten lokal zusammenhängend nach Lemma 2.9.3.

Da f nur endlich viele kritische Punkte besitzt, besitzt f nach Lemma 2.4.16 nur endlich viele attraktive Fatoukomponenten und nach Lemma 3.1.3 nur endlich viele Fatoukomponenten, auf denen f nicht univalent ist. Deshalb genügt es nach dem Kriterium für lokalen Zusammenhang (Satz 3.6.1), zu zeigen, dass die Durchmesser univalenter Pullbacks einer Fatoukomponente U gegen 0 gehen.

Sei also U eine Fatoukomponente und $(U_n)_{n \geq 0}$ eine Folge disjunkter univalenter Pullbacks von $U = U_0$, sodass $f(U_{n+1}) = U_n$ für alle $n \geq 0$ gilt. Sei $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow U$ die Riemann-Abbildung, die sich nach dem Satz von Carathéodory (Satz 2.9.2) stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$ fortsetzen lässt.

Sei $A = U \setminus \varphi(\overline{B_s(0, R)})$ ein Ringgebiet mit $0 < R < 1$, sodass

$$\text{dist}_s(\partial A) < \frac{r}{2}$$

gilt, wobei r durch SumShrink gegeben ist.

Sei außerdem entsprechend $(A_n)_{n \geq 1}$ die Folge der univalenten Pullbacks von A . Nach Konstruktion gilt mit Lemma 2.7.6 für alle $n > 0$

$$\text{mod } A = \text{mod } A_n.$$

Setze $\alpha := \text{mod } A$. Überdecke A mit Bällen vom Radius r und Mittelpunkten auf $\partial U \subseteq \mathcal{J}$, dann gilt mit SumShrink

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}_s(\partial A_n) = 0. \quad (4.3.3)$$

Seien C_n und K_n die Komponenten von $\overline{\mathbb{C}} \setminus A_n$ mit $\text{diam}_s C_n \leq \text{diam}_s K_n$ für alle $n > 0$. Dann gilt nach Konstruktion

$$\text{diam}_s(C_n \cup A_n) \leq \text{diam}_s C_n + 2 \text{dist}_s(\partial A_n). \quad (4.3.4)$$

Ist n genügend groß, so gilt $\text{dist}_s(\partial A_n) < 1/4$ und mit Lemma 3.3.3 und Lemma 2.7.10 $\text{diam}_s C_n < 1/2$. Dann enthält K_n die Hälfte der Riemannschen Sphäre. Daher gibt es höchstens ein (genügend großes) n , sodass $K_n \subseteq U_n$ gilt, da es sonst zwei disjunkte Mengen gäbe, die jeweils mehr als die Hälfte von $\overline{\mathbb{C}}$ enthalten. Deshalb existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $C_n \subseteq U_n$ für alle $n \geq n_0$ gilt und damit

$$U_n = A_n \cup C_n$$

gilt. Dann folgt für alle $n \geq n_0$ mit Lemma 3.3.3 und Lemma 2.7.10 sowie der Ungleichung (4.3.4)

$$\begin{aligned} \text{diam}_s U_n &= \text{diam}_s(A_n \cup C_n) \\ &\leq \text{diam}_s C_n + 2 \text{dist}_s(\partial A_n) \\ &\leq C_\alpha^{-1} \text{dist}_s(\overline{\mathbb{C}} \setminus A_n) + 2 \text{dist}_s(\partial A_n) \\ &\leq C_\alpha^{-1} \text{dist}_s(\partial A_n) + 2 \text{dist}_s(\partial A_n) \\ &= (C_\alpha^{-1} + 2) \text{dist}_s(\partial A_n). \end{aligned}$$

Daraus folgt mit (4.3.3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}_s U_n = 0.$$

Mit dem Kriterium für lokalen Zusammenhang (Satz 3.6.1) folgt das Behauptete. \square

Literaturverzeichnis

- [1] Ahlfors, Lars V.: *Conformal invariants, topics in geometric function theory*, McGraw-Hill, 1973
- [2] Barański, Krzysztof, Karpińska, Bogusława und Zdunik, Anna: *Bowen's formula for non-hyperbolic meromorphic functions*, arXiv:1007.3855v1
- [3] Beardon, Alan F.: *Iteration of rational functions*, Springer-Verlag, 1991
- [4] Bergweiler, Walter: *Skript zur Vorlesung Komplexe Dynamik I+II*, 2008–2009
- [5] Bergweiler, Walter: *Skript zur Vorlesung Iteration analytischer Funktionen I+II*, 1998–1999
- [6] Bergweiler, Walter und Morosawa, Shunsuke: *Semihyperbolic entire functions*, Institute of Physics Publishing, Nonlinearity 15, 2002, S. 1673–1684
- [7] Carleson, Lennart und Gamelin, Theodore W.: *Complex dynamics*, Springer-Verlag, 1993
- [8] Carleson, Lennart, Jones, Peter W. und Jean-Christophe Yoccoz: *Julia and John*, Bol. Soc. Brasil. Mat., Vol. 25, Nr. 1, 1994, S. 1–30
- [9] Conway, John B.: *Functions of one complex variable I - second edition*, Springer-Verlag, 1995
- [10] Douady, Adrien und Hubbard, John H.: *Étude dynamique des polynômes complexes I, II*, Publ. Math. d'Orsay, 1984/85
- [11] Fatou, Pierre: *Sur l'itération des fonctions transcendentes entières*, Acta Math., Vol. 47, 1926, S. 337–370
- [12] Gehring, Frederick W.: *Characteristic properties of quasidisks*, Les Passes de l'Université de Montréal, 1982, S. 1–97

-
- [13] Gehring, Frederick W., Hag, Kari und Martio, Olli: *Quasihyperbolic geodesics in John domains*, Math. Scand., Vol. 65, Nr. 1, 1989, S. 75–92
- [14] Golusin, Genadii M.: *Geometric theory of functions of a complex variable*, American Mathematical Society, 1969
- [15] Graczyk, Jacek und Smirnov, Stas: *Non-uniform hyperbolicity in complex dynamics*, Invent. Math., Vol. 175, 2009, S. 335–415
- [16] Graczyk, Jacek und Smirnov, Stas: *Collet, Eckmann and Hölder*, Invent. Math., Vol. 133, Nr. 1, 1998, S. 69–96
- [17] Herron, David A.: *John domains and the quasihyperbolic metric*, Complex Variables Theory Appl., Vol. 39, Nr. 4, 1999, S. 327–334
- [18] John, F.: *Rotation and strain*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 14, 1961, S. 391–413
- [19] Julia, Gaston: *Sur l'itération des fonctions rationnelles*, J. Math. Pures Appl., Vol. 4, 1918, S. 47–245
- [20] Lehto, Olli und Virtanen, K. I.: *Quasikonforme Abbildungen*, Springer-Verlag, 1965
- [21] Mañé, Ricardo: *On a theorem of Fatou*, Bol. Soc. Bras. Mat., Vol. 24, 1993, S. 1–12
- [22] Mihalache, Nicolae: *Julia and John revisited*, arXiv:0803.3889v3
- [23] Mihalache, Nicolae: *Collet-Eckmann condition for recurrent critical orbits implies uniform hyperbolicity on periodic orbits*, Ergodic Theory Dynam. Systems, Vol. 27, Nr. 4, 2007, S. 1267–1286
- [24] Milnor, John: *Dynamics in one complex variable*, Vieweg-Verlag, 1999
- [25] Näkki, Raimo und Väisälä, Jussi: *John disks*, Expo. Math, Vol. 9, 1991, S. 3–43
- [26] Pommerenke, Christian: *Boundary behaviour of conformal maps*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften Vol. 299, Springer-Verlag, Berlin, 1992
- [27] Przytycki, Feliks, Rivera-Letelier, Juan and Smirnov, Stanislav: *Equivalence and topological invariance of conditions for non-uniform hyperbolicity in the iteration of rational maps*, Invent. Math., Vol. 151, Nr. 1, 2003, S. 29–63
- [28] Steinmetz, Norbert: *Rational iteration*, Walter de Gruyter, 1993
- [29] Whyburn, Gordon T.: *Analytic Topology*, American Mathematical Society, 1942

-
- [30] Yampolsky, Michael und Zakeri, Saeed: *Mating Siegel quadratic polynomials*, J. Amer. Math. Soc., Vol. 14, Nr. 1, 2001, S. 25–78

Danksagung

Bei Professor Dr. Bergweiler bedanke ich mich herzlich für die Zeit, die er sich für die Betreuung meiner Diplomarbeit genommen hat, und für die zahlreichen anregenden und hilfreichen Gespräche, durch die er diese Arbeit entscheidend unterstützt hat.

Bedanken möchte ich mich auch bei Jörn Peter, Julka Deimling und Helena Mihaljević-Brandt, die immer ein offenes Ohr für meine Fragen hatten, sowie bei meinen Kommilitonen Simon Albrecht und Sebastian Vogel.

Bettina Liebler danke ich für das Korrekturlesen.

Ein besonderer Dank gilt meiner Freundin Karoline Liebler für ihre Unterstützung und ihre Geduld, während ich diese Arbeit geschrieben habe.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorstehende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Kiel, den

Markus Baumgartner